2. Основы теории систем управления высокоточных ракетных комплексов Сухопутных войск / *Б.Г.Гурский, М.А.Лющанов, Э.П.Спирин*: Под ред. В.Л.Солунина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.
3. *Щербинин В.В., Кравченко П.П., Хусаинов Н.Ш.* Методология разработки информационно-алгоритмического обеспечения перспективных систем посадки на малооборудованные и необорудованные аэродромы по информации от автономной системы ближней радионавигации //Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск "Интеллектуальные САПР". – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2006. – № 2.
4. *Кравченко П.П., Хусаинов Н.Ш.* Синтез алгоритмов системы управления летательного аппарата на основе теории оптимизированных дельта-преобразований второго порядка // Известия ТРТУ. Специальный выпуск "Материалы XLIX научно-технической и научно-методической конференций профессорско-преподавательского состава, аспирантов и сотрудников ТРТУ. –№ 1(36). – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. – С.66-71.

УДК 62 – 501.462

А.Р. Гайдук

К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

Задача управления многомерными объектами была поставлена в тридцатых годах прошлого века И.Н. Вознесенским [1], как задача автономного (независимого) регулирования нескольких выходных переменных. Практически в то же время Г.В. Щипановым была сформулирована задача синтеза инвариантных к внешним воздействиям систем управления [2]. Этим задачам посвящены многочисленные публикации [3 – 9], поскольку с практической точки зрения целесообразно придавать системам управления сложными объектами свойство инвариантности.

Основная сложность решения задачи синтеза многомерных систем автоматического управления (МСАУ) связана с их многомерностью, т.е. наличием нескольких переменных, каждой из которых необходимо управлять либо независимо, либо согласованно. Если синтезируется инвариантная к внешним воздействиям МСАУ, то задача осложняется условиями разрешимости задачи синтеза инвариантных САУ [8].

Анализ известных решений задачи синтеза МСАУ приводит к выводу, что указанные сложности обусловлены использованием обратных связей и для обеспечения требуемых вход-выходных соотношений, и для придания устойчивости. В то же время известно, что для автономного или связного управления и инвариантности необходимы определённые значения передаточных нулей, а для устойчивости – соответствующие значения полюсов системы.

В работе [7] было предложено разделить средства решения этих задач: для обеспечения автономности или связности использовать управление по воздействиям (прямые связи), а для устойчивости – обратные связи. Разработанный на основе этого подхода метод является полностью аналитическим и позволяет построить устойчивую, автономную или связную систему, и придать ей требуемое качество в переходном и в установившемся режиме.

Ниже излагается метод синтеза инвариантных к воздействиям МСАУ, минимального порядка, в которых используются обратные связи по управляемым переменным и прямые связи по измеряемым воздействиям.

Постановка задачи

Многомерный объект управления можно описать уравнениями:

$$A(s)y_i(s)=\sum_{j=1}^{p}B_{ij}(s)u_j(s)+\sum_{k=1}^{q}H_{ik}(s)f_k(s), \quad i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

где $y_i(s)$, $u_j(s)$ и $f_k(s)$ – изображения по Лапласу управляемой величины $y_i(t)$, управления $u_j(t)$ и возмущения $f_k(t)$; $A(s)=\det(sE_n-A)$, $B_{ij}(s)=c_i\,\mathrm{adj}(sE_n-A)b_j$, $H_{ik}(s)=c_i\,\mathrm{adj}(sE_n-A)h_k$. Здесь число n – размерность вектора состояния $x\in R^n$, A – системная матрица; c_i и b_j, h_k – строки и столбцы числовых матриц C и B, H уравнений объекта (1).

Объект (1) может быть неустойчивым, неполным, неминимально-фазовым, но стабилизируемым [7]. Будем предполагать, что управляемые переменные y_i, задающие воздействия g_j и часть возмущений f_k измеряются.

Уравнения устройства управления (УУ) приводятся ниже. Здесь отметим только, что оно является линейным, поэтому уравнения «вход-выход» замкнутой системы имеют следующий вид:

$$y_i(s)=\sum_{j=1}^{p}W_{ij}(s)g_j(s)+\sum_{k=1}^{q}V_{ik}(s)f_k(s),\ i=\overline{1,p}, \tag{2}$$

где $y_i(s)$, $g_l(s)$ и $f_k(s)$ – изображения по Лапласу управляемой величины $y_i(t)$, задающего воздействия $g_i(t)$ и возмущения $f_k(t)$; $W_{ij}(s)$, $V_{ik}(s)$ – передаточные функции системы.

Предположим, на комплексной плоскости выделена область Ω допустимого расположения полюсов системы (2). Если нули некоторого полинома $H(s)$ в области Ω, то будем писать $H_{\Omega}(s)$, в противном случае – $H_{\overline{\Omega}}(s)$.

Предполагая, что условие стабилизируемости объекта (1) выполнено, поставим задачу определения УУ так, чтобы нули характеристического полинома $D(s)$ замкнутой системы (2) располагались в области Ω, а её передаточные функции $W_{ij}(s)$ каналов $g_j\rightarrow y_i$ удовлетворяли условиям:

а) при автономном управлении

$$W_{ii}(s)=W_{ii}^{*}(s),\quad W_{ij}(s)\equiv 0,\quad i\neq j,\quad i,j=\overline{1,p}; \tag{3}$$

б) при связном управлении

$$W_{ij}(s)=W_{ij}^{*}(s),\quad i,j=\overline{1,p}. \tag{4}$$

Здесь $W_{ij}^{*}(s)$ – желаемые передаточные функции, сформированные с учетом: условий инвариантности или желаемого порядка астатизма; соответствующих условий разрешимости, а также требований к качеству переходного процесса данного канала синтезируемой системы (2).

К возмущениям система должна быть либо абсолютно инвариантной, если это возможно; либо селективно инвариантной, если известно K_D-изображение [8] возмущения $f_k(t)$, или же астатической в противном случае, т.е.

$$V_{i\bar{k}}(s) \equiv 0,\ \bar{k} \in [1, q] \text{ или } V_{ik}(s) = \tilde{V}_{ik}(s) F_k(s),\ k = \overline{1, q},\ k \neq \bar{k}. \quad (5)$$

Здесь $F_k(s)$ – либо K_D-изображение возмущения $f_k(t)$, где оператор D заменён на s, либо $F_k(s) = s^{\nu_{fk}}$, где ν_{fk} – желаемый порядок астатизма системы к возмущению $f_k(t)$.

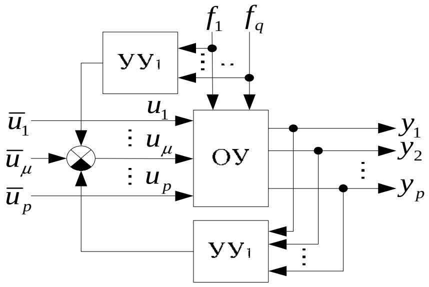
Синтез системы (2) рассматриваемым методом выполняется в два этапа. На первом этапе выбирается УУ$_1$. При этом обратные связи по управляемым переменным используются в нём, если не выполняется условие

$$A(s) = A_{\Omega}(s). \quad (6)$$

Прямые связи вводятся в УУ$_1$ лишь по тем измеряемым возмущениям $f_{\bar{k}}$, $\bar{k} \in [1,\ \tau]$, по отношению к которым может быть достигнута абсолютная инвариантность синтезируемой системы [8]. На втором этапе синтеза обеспечивается автономность или связность каналов, а также другие требования к качеству системы. Рассмотрим порядок выполнения первого этапа.

Устойчивость и абсолютная инвариантность

Как известно, при декомпозиции объектов управления с помощью присоединённой матрицы [7] может образовываться неполный объект, полюсы неполной части которого могут не принадлежать области Ω. Поэтому декомпозировать таким способом можно лишь такой объект, полином $A(s)$ которого удовлетворяет условию (6). В связи с этим, обратные и прямые связи целесообразно формировать так, как показано на рис. 1,а или рис. 1,б.



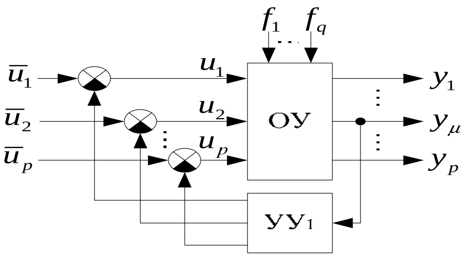


Рис. 1. Типы обратных связей МСАУ

В этом случае указанные уравнения будут линейными, а УУ иметь либо один вход, либо один выход, что существенно упрощает его реализацию.

При этом, если обратные связи введены так, как показано на рис. 1,а, т.е. УУ$_1$ описывается уравнением

$$R(s)u_{\mu}(s)=R(s)\bar{u}_{\mu}-\sum_{l=1}^{p}L_{\mu l}(s)\,y_l(s)+\sum_{k=1}^{q}M_{\mu k}(s)\,f_k(s), \qquad (7)$$

где u_{μ} – обозначение управления объекта (1), которое используется для ввода сигнала обратной связи, то уравнение объекта (1), (7) имеет вид

$$\bar{A}(s)y_i(s)=\sum_{j=1}^{p}\bar{B}_{ij}(s)\bar{u}_j(s)+\sum_{k=1}^{q}\bar{H}_{ik}(s)\,f_k(s),\ i=\overline{1,\,p}, \qquad (8)$$

где

$$\bar{A}(s)=R(s)\,A(s)+\sum_{l=1}^{p}L_{\mu l}(s)B_{l\mu}(s);$$

$$u_j=\bar{u}_j,\ j=\overline{1,\,p};\ j\neq\mu, \qquad (9)$$

$$\bar{B}_{ij}(s)=R(s)B_{ij}(s)+\sum_{l=1,\,l\neq i}^{p}L_{\mu l}(s)A^{-1}(s)[B_{ij}(s)B_{l\mu}(s)-B_{i\mu}(s)B_{lj}(s)], \qquad (10)$$

$$\bar{H}_{ik}(s)=\sum_{l=1,\,l\neq i}^{p}L_{\mu l}(s)A^{-1}(s)[H_{ik}(s)B_{l\mu}(s)-B_{i\mu}(s)H_{lk}(s)]+$$
$$+R(s)H_{ik}(s)+B_{i\mu}(s)M_{\mu k}(s). \qquad (11)$$

Если какие-то возмущения f_{k^*} не измеряются, то соответствующий полином в (7) и в (11) $M_{k^*}(s)\equiv 0$. В случае УУ$_1$, показанном на рис. 1,а, условие стабилизируемости объекта (1) можно записать в виде равенства

$$\text{НОД}\{A(s),\ \underset{l=\overline{1,\,p}}{\text{НОК}}[B_{l\mu}(s)]\}=O_{\Omega}(s), \qquad (12)$$

где $O_{\Omega}(s)$ – некоторый полином или постоянное число.

Если же обратные связи введены, как показано на рис. 1,*б*, т.е. УУ$_1$ описывается уравнениями :

$$R(s)u_j(s)=R(s)\bar{u}_j-L_{j\mu}(s)\,y_{\mu}(s),\ j=\overline{1,\,p}, \qquad (13)$$

где y_{μ} – управляемая переменная, используемая для образования обратных связей, то замкнутая система по-прежнему описывается уравнением (8), но его полиномы определяются несколько другими выражениями, а именно:

$$\bar{A}(s)=R(s)A(s)+\sum_{l=1}^{\nu}L_{l\mu}(s)B_{\mu l}(s), \qquad (14)$$

$$\bar{B}_{ij}(s)=R(s)B_{ij}(s)+\sum_{l=1}^{p}L_{l\mu}(s)A^{-1}(s)[B_{ij}(s)B_{\mu l}(s)-B_{il}(s)B_{\mu j}(s)], \qquad (15)$$

$$\bar{H}_{ik}(s) = R(s)H_{ik}(s) + \sum_{l=1}^{p} L_{l\mu}(s)A^{-1}(s)[H_{ik}(s)B_{\mu l}(s) - B_{il}(s)H_{\mu k}(s)],$$

$$k = \overline{1, q}, \tag{16}$$

Условие стабилизируемости объекта (1) здесь имеет вид

$$\text{НОД}\{A(s), \underset{l=\overline{1,p}}{\text{НОК}}[B_{\mu l}(s)]\} = \tilde{O}_{\Omega}(s), \tag{17}$$

где $\tilde{O}_{\Omega}(s)$ – некоторый полином или постоянное число.

Отметим, что в выражениях (7) – (17) индекс l пробегает лишь те значения из интервала $[1, p]$, которые соответствуют управлениям u_l или управляемым переменным y_l, используемым в УУ$_1$ (7) или (13).

Условия физической реализуемости УУ$_1$ (7) и (13) запишем в виде неравенств

$$\max_{l=\overline{1,p}}\{\deg L_{\mu l}(s)\} \leq \deg R(s) - \mu_y^*,$$

$$\max_{k=\overline{1,q}}\{\deg M_{\mu k}(s)\} \leq \deg R(s) - \mu_y^*, \tag{18}$$

где μ_y^* – допустимое по условиям физической реализуемости УУ$_1$ значение относительной степени соответствующих передаточных функций.

Заменяя в выражениях (9) или (14) полином $\bar{A}(s)$ полиномом $\bar{A}^*(s) = A_{\Omega}^*(s)O_{\Omega}(s)$, где $O_{\Omega}(s)$ – полином из выражений (12) или (17), а $A_{\Omega}^*(s)$ – желаемый полином степени $n - \deg O_{\Omega}(s)$ систем (1), (7) или (1), (13), получим соответствующее полиномиальное уравнение (9) или (14) относительно полиномов $R(s)$ и $L_{\mu l}(s)$ или $L_{l\mu}(s)$. Эти уравнения эквивалентны системам линейных алгебраических уравнений, решения которых определяют коэффициенты полиномов УУ$_1$. Разрешимость той или иной указанной системы алгебраических уравнений обеспечивается, как показано в [9], выбором степеней полиномов $R(s)$ и $L_{\mu l}(s)$ или $L_{l\mu}(s)$ с учетом условий (18) и переменных, используемых для образования обратных связей.

Условия абсолютной инвариантности, как известно, достигаются довольно редко [8]. В данном случае, они могут быть обеспечены по отношению к некоторому возмущению $f_{\bar{k}}$, $\bar{k} \neq k^*$ лишь при использовании УУ$_1$ (7), схема которого приведена на рис. 1,а. Необходимое условие $H_{i\bar{k}}(s) \equiv 0$, $\bar{k} \neq k^*$ может быть достигнуто, например, если при всех $i \in [1, p]$ и некоторых $\bar{k} \in [1, q]$, $\bar{k} \neq k^*$ и $\bar{\mu} \in [1, p]$ выполнены условия

$$H_{i\bar{k}}(s) = \eta_{i\bar{k}}H_0(s), \; B_{i\bar{\mu}}(s) = \beta_{i\bar{\mu}}H_0(s),$$

$$\sum_{l=1,\, l\neq i}^{p} L_{\bar{\mu}l}(s)A^{-1}(s)[B_{l\bar{\mu}}(s)H_{i\bar{k}}(s)-B_{i\bar{\mu}}(s)H_{l\bar{k}}(s)]=H_0(s)T_{i\bar{k}}(s), \quad (19)$$

где $H_0(s)$ и $T_{i\bar{k}}(s)$ – некоторые полиномы. В этом случае в выражениях (7) и (11) следует положить $M_{\bar{\mu}\bar{k}}(s)=-(\eta_{i\bar{k}}\bar{R}(s)+T_{i\bar{k}})/\beta_{i\bar{\mu}}$, а $M_{\mu k}(s)\equiv 0$, при $k\neq\bar{k}$.

Таким образом, задавшись полиномом $A^*_{\Omega}(s)$, составив и решив одну из указанных выше систем алгебраических уравнений, найдем по формулам (9) – (11) или (14) – (16) все полиномы из уравнения (8) нового объекта управления, характеристический полином которого удовлетворяет условию (6). Порядок этого объекта будет равен $\bar{n}=n+\deg R(s)$. Если найдутся $\bar{k}\in[1,q]$, при которых выполняются условия (19), то все его переменные $y_i(t)$ будут абсолютно инвариантными к возмущениям $f_{\bar{k}}$.

Отметим, что если исходный объект управления (1) удовлетворяет условию (6), то в уравнениях (7) или (13) все полиномы $L_{\mu l}(s)\equiv 0$, т.е. обратные связи по управляемым переменным не вводятся. Аналогично, если условия (19) не выполняются ни при каких $\bar{k}$, то в (7) и в (11) все полиномы $\bar{M}_{\mu k}(s)\equiv 0$.

Многомерное управление

Для построения управления $\bar{u}$, при котором выполняются условия (3) или (4) представим, следуя [7], уравнение (8) найденного в п. 3 объекта или уравнение (1) исходного объекта, удовлетворяющего условию (6), в виде

$$\bar{A}(s)y=\bar{B}_{yu}(s)\bar{u}(s)+\bar{H}_{yf}(s)f(s), \quad (20)$$

где $\bar{B}_{yu}(s)$ и $\bar{H}_{yf}(s)$ – $p\times p$ и $p\times q$ матрицы, полиномы которых имеют известные числовые коэффициенты.

Далее найдём передаточную матрицу $\bar{W}_{y\bar{u}}(s)=\bar{A}^{-1}(s)\bar{B}_{y\bar{u}}(s)$, её определитель $\det\bar{W}_{y\bar{u}}(s)$ и диагонализирующую матрицу $\bar{\Pi}(s)$:

$$\det\bar{W}_{y\bar{u}}(s)=B_0(s)/A_0(s),$$
$$\bar{\Pi}(s)=A_0(s)\operatorname{adj}\bar{W}_{y\bar{u}}(s)=[\bar{\Pi}_{ij}(s)], \quad (21)$$

где $A_0(s)=\bar{A}(s)/O_0(s)$. Здесь $O_0(s)$ – некоторый полином, причём $O_0(s)=O_{0\Omega}(s)$, поскольку $\bar{A}(s)=\bar{A}_{\Omega}(s)$. Затем проведём факторизацию полинома $B_0(s)$ относительно области Ω, т.е. найдём представление

$$B_0(s)=B_{\Omega}(s)B_{\bar{\Omega}}(s), \quad (22)$$

где $B_{\Omega}(s)$ – нормированный полином или единица, а $B_{\bar{\Omega}}(s)=B_0(s)/B_{\Omega}(s)$.

Обозначим K_D-изображение j-го задающего воздействия $g_j(t)$ $j=\overline{1,p}$ при замене оператора *D* на *s* как $G_j(s)$, $j=\overline{1,p}$ и введём полиномы

$$F(s)=\underset{k\neq\bar{k}}{\text{НОК}}\{F_1(s),\ldots,F_q(s)\},\ \Phi_j(s)=\text{НОК}\{G_j(s),F(s)\},\ j=\overline{1,p}. \quad (23)$$

Будем считать также, что выполняются следующие условия [8]:

$$\deg\Phi_j(s)\geq 1,\ \text{НОД}\{B_{\bar{\Omega}}(s),\Phi_j(s)\}=Const,\ j=\overline{1,p}. \quad (24)$$

Как и в случае возмущений, если K_D-изображение j-го задающего воздействия $g_j(t)$ не известно, то в (23) можно полагать $G_j(s)=s^{\nu_{gj}}$, где ν_{gj} – желаемый порядок астатизма канала $g_j\rightarrow y_j$.

Обозначим

$$\zeta_j=\max_{i\in\overline{1,p}}\{\deg P_{ij}(s)\},\ m_{\Omega}=\deg B_{\Omega}(s),\ m_{\bar{\Omega}}=\deg B_{\bar{\Omega}}(s);$$

$$R_0(s)=N(s)R(s),$$

где $N(s), R(s)$, а также $L(s)$ – $p\times p$ диагональные матрицы, составленные из полиномов $N_j(s),\ R_j(s),\ L_j(s),\ j=\overline{1,p}$.

При этом $\deg R_j(s)=\zeta_j+\mu_y^*-m_{\Omega}$, $N_j(s)=R_{0j}(s)/R_j(s)$, а $\deg L_j(s)=\deg\Phi_j(s)-1$. Пусть также $Q(s)$ – $p\times p$ матрица общего вида, а $Q_{ij}(s)$, $i,j=\overline{1,p}$ её полиномы. При этом аналогично условиям (18) $\max_{l=\overline{1,p}}\{\deg Q_{jl}(s)\}\leq\deg N_j(s)-\mu_y^*$.

Полиномы $R_{0j}(s)=B_{\Omega}(s)\Phi_j(s)\tilde{R}_{0j}(s)$, причем $\deg\tilde{R}_{0j}(s)=\zeta_j+2\mu_y^*-1-m_{\Omega}$, а численные значения коэффициентов полиномов $\tilde{R}_{0j}(s)$ и $L_j(s)$ определяются решением полиномиальных уравнений

$$\Phi_j(s)\tilde{R}_{0j}(s)+B_{\bar{\Omega}}(s)L_j(s)=D_j(s),\ j=\overline{1,p}, \quad (25)$$

где $D_j(s)$ – желаемые полиномы знаменателей передаточных функций каналов $g_i\rightarrow y_j$, $f_k\rightarrow y_j$, причем $\deg D_j(s)=\deg\Phi_j(s)+\deg\tilde{R}_{0j}(s)$, $i,j=\overline{1,p}$.

Полиномы $Q_{jj}(s)$ определяются решением полиномиальных уравнений

$$Q_{jj}(s)+G_j(s)\tilde{V}_j(s)=L_j(s), \tag{26}$$

причем

$$\deg Q_{jj}(s)=\deg G_j(s)-1, \text{ а}$$

$$\deg \tilde{V}_j(s)=\deg L_j(s)-\deg G_j(s).$$

Если обеспечивается селективная инвариантность канала $g_j \to y_j$, причём $G_j(s)\neq s^{\nu_{gj}}$, то коэффициенты соответствующего полинома $D_j(s)$ из (25) назначаются, с учётом желаемого характера переходного процесса.

Полиномы $Q_{ij}(s)\equiv 0$ при $i\neq j$, если синтезируется автономная система, т.е. в соответсвии с условиями (3). Если же требуется обеспечить определённую взаимосвязь между *i*-й управляемой переменной и *j*-м задающим воздействием, то соответсвующий полином $Q_{ij}(s)$ выбирается, исходя из того, что передаточная функция замкнутой системы по каналу $g_j \to y_i$, $i\neq j$ определяется выражением $W_{ij}(s)=B_{\bar{\Omega}}(s)Q_{ij}(s)/D_i(s)$.

Управление $\bar{u}$ в уравнении объекта (20) определяется уравнениями:

$$\bar{u}(s)=B_{\Omega}^{-1}(s)\bar{\Pi}(s)R_1^{-1}(s)k(s), \tag{27}$$

$$k(s)=N^{-1}(s)\left[Q(s)g(s)-L(s)y(s)\right], \tag{28}$$

где $k(s)$ – изображение вектора промежуточных переменных $k(t)\in R^p$.

Для реализации УУ$_1$ и УУ$_2$ сначала осуществляется переход к уравнениям в переменных состояния, подробно рассмотренный в [7].

Пример

Проиллюстрируем методику синтеза многомерных инвариантных систем управления предложенным методом на примере объекта из работы [6], который при наличии возмущений описывается уравнениями (1), где $n=4,\ p=2,\ q=2$, а полиномы:

$$A(s)=\left(s+0,2\right)^2\left(s+0,5\right)s, \tag{29}$$

$$B_{11}(s)=0,4\left(s+0,4\right)\left(s+0,5\right)s,\ B_{12}(s)=0,8\left(s+0,2\right)\left(s+0,5\right)s,$$

$$B_{21}(s)=0,1\left(s-1\right)\left(s+0,2\right)s,\ B_{22}(s)=2\left(s+0,2\right)^2\left(s+0,5\right), \tag{30}$$

$$H_{11}(s)=0,2\left(s+0,5\right)\left(s+0,2\right)s,$$

$$H_{12}(s)=0,3\left(s+0,5\right)\left(s+0,2\right)s,$$

$$H_{21}(s)=0,8\left(s+0,5\right)\left(s+0,2\right)(s+0,175),\ H_{22}(s)=0,4\left(s+0,2\right)^2 s. \tag{31}$$

Измерению доступны векторы y, $\varepsilon = g - y$ и f. Необходимо найти автономное управление, обеспечивающее селективную инвариантность к гармоническому воздействию $g_1(t)$ с частотой $\omega = \sqrt{9{,}86}$, астатизм второго порядка к воздействию $g_2(t)$, длительность t_{p1} переходной функции по каналу $g_1 \to y_1$ не более 1,7 *с*, а по каналу $g_2 \to y_2$ – не более 3 *с*. Степень устойчивости не хуже 0,15. Условия реализуемости: для УУ$_1$ (7) $\mu_y^* = 0$, а для УУ$_2$ (27) и (28) $\mu_y^* = 1$.

Переходя к решению задачи, определим область Ω условием $\mathrm{Re}\, s \le -0{,}15$. Заданный объект согласно (29) условию (6) не удовлетворяет. Так как желательна абсолютная инвариантность системы к возмущениям, примем уравнения УУ$_1$ в виде (7). С помощью выражений (29) и (30) легко установить, что условие стабилизируемости (12) выполняется только при $\mu = 2$ в (7). Полагая полином $\bar{A}^*(s) = (s+0{,}2)^2(s+0{,}5)(s+2)$, получим из уравнения (9) $R(s) = 1$, $L_{22}(s) = 1$. Подставляя полиномы (29) – (31) в (11) заключаем, что условия (19) не выполняются ни при $k = 1$, ни при $k = 2$. Поэтому все полиномы $M_{jk}(s) \equiv 0$ и уравнение УУ$_1$ (7) принимают вид $u_2 = \bar{u}_2 - y_2$, $u_1 = \bar{u}_1$.

С учетом введенной обратной связи полином и матрицы из уравнения (20) устойчивого объекта принимают вид:

$$\bar{A}^*(s) = (s+0{,}5)(s+0{,}2)^2(s+2), \tag{32}$$

$$\bar{B}(s) = \begin{bmatrix} 0{,}4s^3 + s^2 + 0{,}68s + 0{,}08 & 0{,}8s^3 + 0{,}56s^2 + 0{,}08s \\ 0{,}1s^3 - 0{,}08s^2 - 0{,}02s & 2s^3 + 1{,}8s^2 + 0{,}48s + 0{,}04 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\bar{H}(s) = \begin{bmatrix} 0{,}2s^3 - 0{,}1s^2 - 0{,}132s - 0{,}016 & 0{,}3s^3 + 0{,}49s^2 + 0{,}38s + 0{,}06 \\ 0{,}8s^3 + 0{,}7s^2 + 0{,}178s + 0{,}014 & 0{,}4s^3 + 0{,}16s^2 + 0{,}016s \end{bmatrix}.$$

Перейдём к определению УУ$_2$. Вычислив по (32) и (33) передаточную функцию $\bar{W}_{y\bar{u}}(s)$, её определитель $\det \bar{W}_{y\bar{u}}(s)$ и матрицы $\mathrm{adj}\, \bar{W}_{y\bar{u}}(s)$ и $\bar{\Pi}(s)$, найдём следующие полиномы:

$$B_0(s) = 0{,}72(s+0{,}7384)(s+0{,}1505),\ \bar{\Pi}_{11}(s) = \bar{B}_{22}(s),$$

$$\bar{\Pi}_{12}(s) = -\bar{B}_{12}(s),\ \bar{\Pi}_{21}(s) = -\bar{B}_{21}(s),\ \bar{\Pi}_{22}(s) = \bar{B}_{11}(s),$$

при этом $\zeta_1 = \zeta_2 = 3$.

Факторизуя по (22) полином $B_0(s)$, получим $B_\Omega(s) = s^2 + 0{,}889s + 0{,}111$, $B_{\bar{\Omega}}(s) = 0{,}74$, т.е. $m_\Omega = 2$. В рассматриваемом случае $G_1(s) = s^2 + 9{,}86$, а в соответствии с требованиями к системе в установившемся режиме

$F_1(s) = F_2(s) = s$, $G_2(s) = s^2$. Поэтому по (23) $F(s) = s$, а $\Phi_1(s) = s^3 + 9{,}86s$, $\Phi_2(s) = s^2$, причём условие (24) выполняется.

Степени полиномов:

$$\deg R_{01}(s) = 3+3+1 = 7,\ \deg L_1(s) = 3-1 = 2,$$
$$\deg \tilde{R}_{01}(s) = 7-2-3 = 2,\ \deg D_1(s) = 3+1+3-2 = 5,$$
$$\deg Q_{11}(s) = 3-1 = 2,\ \deg \tilde{L}_1(s) = 0.$$

Коэффициенты δ_{1i} полинома $D_1(s)$ выберем по коэффициентам $\Delta_5 = 1$, $\Delta_4 = 2{,}7$, $\Delta_3 = 4{,}9$, $\Delta_2 = 5{,}4$, $\Delta_1 = 3{,}4$, $\Delta_0 = 1$ нормированного полинома, при которых время регулирования $t_{рн} = 5{,}43\,с$. Полагая временной масштабный коэффициент $\omega_{01} = t_{рн}/t_{р1} = 5{,}43/1{,}7 \approx 3{,}2$, найдем [10]:

$$\delta_{15} = 1,\ \delta_{14} = 8{,}64,\ \delta_{13} = 50{,}18,\ \delta_{12} = 176{,}95,\ \delta_{11} = 356{,}52,$$
$$\delta_{10} = 335{,}54.$$

Таким образом, при $j = 1$ полиномиальные уравнения (25) и (26) имеют вид

$$(s^3 + 9{,}86s)\tilde{R}_{01}(s) + 0{,}72L_1(s) = D_1(s),$$
$$Q_{11}(s) + (s^2 + 9{,}86)\tilde{\lambda}_0 = L_1(s).$$

Решения систем алгебраических уравнений, соответсвующих этим уравнениям [10], дают:

$$L_1(s) = 127{,}4s^2 - 57{,}4s + 466{,}1,\ Q_{11}(s) = -57{,}4s + 790{,}1,$$
$$R_{01}(s) = (s^2 + 0{,}8889s + 0{,}1111)(s^2 + 8{,}64s + 40{,}32)(s^3 + 9{,}86).$$

При $j = 2$ аналогично находим:

$$\deg R_{02}(s) = 2+3+1 = 6,\ \deg L_2(s) = 2-1 = 1,$$
$$\deg \tilde{R}_{02}(s) = 6-2-2 = 2,\ \deg D_2(s) = 2+1+3-2 = 4,$$
$$\deg Q_{22}(s) = 2-1 = 1,\ \deg \tilde{V}_2(s) = -1, \text{ т.е. } \tilde{V}_2(s) = 0.$$

Коэффициенты δ_{2i} полинома $D_2(s)$ выберем по коэффициентам $\Delta_4 = 1$, $\Delta_3 = 7{,}2$, $\Delta_2 = 16{,}3$, $\Delta_1 = 11{,}8$, $\Delta_0 = 1$ стандартной передаточной функции системы с астатизмом 2-го порядка по задающему воздействию, при которой время регулирования $t_{рн} = 12\,с$. При $\omega_{02} = 12/3 = 4$ найдем $\delta_{24} = 1$, $\delta_{23} = 28{,}8$, $\delta_{22} = 261$, $\delta_{21} = 755$, $\delta_{20} = 256$. Уравнения (25) и (26) здесь принимают вид

$$s^2 R_{02}(s) + 0,72 L_2(s) = D_2(s), \qquad Q_{22}(s) = L_2(s).$$

В результате решения этих уравнений находим следующие полиномы:

$$Q_{22}(s) = L_2(s) = 1048,6s + 355,6,$$
$$R_{02}(s) = (s^2 + 0,889s + 0,111)(s^2 + 28,8s + 261)s^2.$$

Для записи уравнений УУ$_2$ найдем $\deg R_j(s) = 3 + 1 = 4$; далее, полагая $R_j(s) = B_\Omega(s)\tilde{R}_{0j}(s)$, получим $N_j(s) = \Phi_j(s)$, $j = 1, 2$. Это позволяет записать по (27), (28) уравнения УУ$_2$ в изображениях:

$$\bar{u}(s) = \frac{0,1}{(s^2 + 0,889s + 0,111)} \begin{bmatrix} \dfrac{20s^3 + 18s^2 + 4,8s + 0,4}{s^2 + 8,64s + 40,32} & \dfrac{-s^3 - 5,6s^2 - 0,8s}{s^2 + 28,8s + 261} \\ \dfrac{-s^3 + 0,8s^2 + 0,2s}{s^2 + 8,64s + 40,32} & \dfrac{4s^3 + 10s^2 + 6,8s + 0,8}{s^2 + 28,8s + 261} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{bmatrix},$$

$$k_1(s) = \frac{-57,4s - 790,1}{s(s^2 + 9,86)} \varepsilon_1(s) - \frac{127,4}{s} y_1(s),$$

$$k_2(s) = \frac{1048,6s + 255,6}{s(s^2 + 9,86)} \varepsilon_2(s).$$

Как видно, относительная степень передаточных функций УУ$_2$ не превышает заданного значения. Тем самым обеспечивается возможность перехода к уравнениям в переменных состояния и физическая реализуемость УУ$_2$.

Путем вычисления передаточных функций или моделирования на ЭВМ, можно убедиться, что найденные управления обеспечивают выполнение всех указанных выше требований к качеству синтезируемой системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вознесенский И.Н.* О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // АиТ. – 1938. – № 4. – С. 4–5.
2. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // АиТ. – 1939. – № 4. – С. 44–66.
3. *Баранчук Е.И.* Взаимосвязанные и многоконтурные регулируемые системы. – Л.: Энергия, 1968.
4. *Янушевский Р.Т.* Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. – М.: Наука, 1973.
5. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
6. *Медведев В.С.*, *Романова Т.А.* Синтез алгоритмов управления, обеспечивающих независимость подсистем многомерного объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 1. –С. 42–49.
7. *Гайдук А.Р.* Об управлении многомерными объектами // АиТ. – 1998. – № 12. – С. 22–37.
8. *Гайдук А.Р.* Условия достижимости инвариантных систем управления энергетическими объектами // АиТ. – 2006. –№ 5. – С. 93–101.
9. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // АиТ. – 1990. – № 5. – С. 29–37.
10. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962.