

## Раздел VI. Вычислительные комплексы нового поколения и нейрокомпьютеры

В.Ф. Гузик, В.Е. Золотовский, Е.С. Ковалёнок

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕННОЙ РАЗРЯДНОЙ СЕТКИ

**Введение.** В настоящее время в науке и технике большое значение приобретает решение задач представляющих мировой интерес (климат, океанические течения и др.). Однако их решение наталкивается на недостаток производительности существующих средств вычислительной техники, что обусловлено их высокой сложностью. Поэтому, как и в предыдущие годы, остро стоит вопрос о существенном повышении производительности вычислительных средств для систем моделирования, работающих в реальных или ускоренных масштабах времени. Наряду с этим существенно возросли и требования к определению погрешностей моделирования. А если принять во внимание, что все математические операции выполняются над числами, представленными в форматах с фиксированной длиной разрядной сетки, то сохраняется необходимость оценить и снизить погрешность округления.

**Объекты исследований.** В данной работе рассматриваются физические процессы, описываемые дифференциальными и дифференциально-алгебраическими уравнениями (1).

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = F(s, x, y, t) \\ G(s, x, y, t) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

Система (1) реализуется теми или иными численными методами. Они подразделяются на явные и неявные. Рассмотрим только неявные методы, т.к. они обеспечивают более точное решение.

**Постановка задачи.** Имеем следующую систему (2), состоящую из  $m$  дифференциальных и  $p$  алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \\ \dots \\ \dot{y}_m = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \\ z_1 = g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \\ z_2 = g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \\ \dots \\ z_p = g_p(t, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_p) \end{cases}, \quad (2)$$

Будем искать решение этой задачи на отрезке  $[t_0, t_0 + a]$ . Для дифференциальных уравнений известны начальные условия  $y_i(0)$  в момент времени  $t_0$ .

В процессе решения, на конечный результат будут влиять две погрешности – методическая и погрешность округления. Причем погрешность округления возникает за счет ограниченной длины разрядной сетки.

Обозначим  $\mu = (\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_{m+p})$  – методическая погрешность,  $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_{m+p})$  – ошибка округления. Рационально использовать численные методы, при условии  $\mu_i \leq \varepsilon_i$  при  $i = 1, 2, \dots, m+p$ . Для решения поставленной задачи, введем сетку узлов интегрирования  $t_i = t_0 + ih$  где  $i = \overline{1, N}$  и  $Nh = a$ .

Примем во внимание следующие два аспекта:

- ◆ методическая погрешность не больше ошибки округления ( $\mu \leq \varepsilon$ );
- ◆ функции  $f_k$  и  $g_k$  являются непрерывными в области  $[t_0, t_0 + a]$  вместе со своими частными производными. А это значит, что для них выполняется условие Липшица.

Приведем вывод оценки общей погрешности для решения системы (2) неявным классом численных методов.

**Вывод оценки глобальной погрешности.** Решение ищется с использованием данных для текущего момента времени. Дифференциальные уравнения заменяются, неявными схемами. В результате чего решение дифференциально-алгебраической системы уравнений сводится к решению только алгебраической системы.

В принципе все явные и неявные многоэтапные методы численного интегрирования всегда можно привести к форме одноэтапных методов. Покажем это. Возьмем на пример четырехэтапный метод. В этом случае за счет выбора параметров можно обеспечить локальную погрешность  $r(h) \sim O(h^5)$  (четвертый порядок точности).

Приведем наиболее употребительную совокупность формул четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad k_1 = f(x_i, y_i) \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Данную схему численного интегрирования как и любую другую многоэтапную можно представить:

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_{i+1}, x_i, y_i, h) \quad i = 0, 1, \dots$$

Приращение на каждом шаге вычисляется с точностью, с которой производится округление, поэтому в качестве схемы для оценки глобальной погрешности возьмем неявную схему Эйлера первого порядка:

$$x^{i+1} = x^i + K, \quad \text{где } K = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{K}{2}\right).$$

Дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими и примут вид:

$$\begin{cases} K_1 = hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{K_1}{2}, y_2^i + \frac{K_2}{2}, \dots, y_m^i + \frac{K_m}{2}, z_1, z_2, \dots, z_p\right) \\ K_2 = hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{K_1}{2}, y_2^i + \frac{K_2}{2}, \dots, y_m^i + \frac{K_m}{2}, z_1, z_2, \dots, z_p\right) \\ \dots \\ K_m = hf_m\left(t_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{K_1}{2}, y_2^i + \frac{K_2}{2}, \dots, y_m^i + \frac{K_m}{2}, z_1, z_2, \dots, z_p\right) \end{cases}$$

Тогда полученную алгебраическую систему можно решить итерационными методами (простой итерации, Ньютона). Процесс итераций будем продолжать до тех пор, пока значения  $K_i$  не будут найдены с точностью  $\varepsilon_i$ .

Для любого момента времени  $i$  будет справедливо следующее:

$$\begin{cases} |ey_1^{i+1}| \leq |ey_1^i| + \varepsilon_1 + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| \leq |ey_1^i| + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| + \delta y \\ |ey_2^{i+1}| \leq |ey_2^i| + \varepsilon_2 + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_2}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| \leq |ey_2^i| + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_2}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| + \delta y \\ \dots \\ |ey_m^{i+1}| \leq |ey_m^i| + \varepsilon_m + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_m}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| \leq |ey_m^i| + h \sum_{j=1}^m \max \left| \frac{\partial f_m}{\partial y_j} \right| \cdot |ey_j^i| + \delta y \end{cases},$$

где  $\delta y = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ .

В начальный момент времени  $t_0$  глобальная погрешность  $R_0 = 0$ .

Упрощенная форма оценки, примет вид:

$$|ey^{i+1}| \leq |ey^i| + hW \cdot |ey^i| + \delta y = (1 + hW) \cdot |ey^i| + \delta y.$$

В результате значения глобальной погрешности:

$$R = N(1 + hW)^N \delta y \quad \text{или} \quad R = \frac{a}{h} \delta y \cdot e^{aW}, \quad (3)$$

где  $\delta y = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ ;

$$W = \max \left( \sum_{j=1}^m \max_t \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \right|, \sum_{j=1}^m \max_t \left| \frac{\partial f_2}{\partial y_j} \right|, \dots, \sum_{j=1}^m \max_t \left| \frac{\partial f_m}{\partial y_j} \right| \right).$$

**Экспериментальная проверка определения глобальной погрешности.** В реальных условиях, вычисление численными методами производится на устройствах с фиксированным числом разрядов. Так же все полученные результаты этих методов должны будут храниться в памяти устройства. Но ранее мы упомянули,

что количество разрядов выделенных под хранение ограничено (часто не более 32 разрядами), в результате чего возникает ошибка округления. Причем эта ошибка начнет влиять на последующие вычисления. Если для вычисления нашей задачи требуется значительное число вычислительных операций, то нарастание ошибки округления может привести к получению противоречивых результатов.

Рассмотрим пример. Пусть необходимо найти решение дифференциального уравнения  $y'(x) = 1 - y(x)$  с начальным условием  $y(0) = 2$  на интервале  $x \in [0; 0.4]$  с некоторым шагом, скажем  $h = 0.00001$ . Предъявим требование к результату – обеспечить точность результата с абсолютной погрешностью  $R \leq 0.5$ .

Аналитическим решением данного дифференциального уравнения будет:

$$y(x) = 1 + e^{-x}.$$

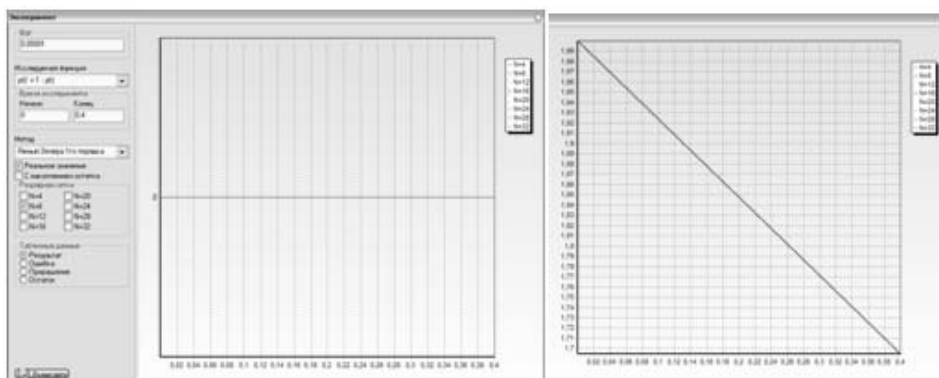
В нашем эксперименте, попытаемся получить верный результат, полагая, что под мантиссу всех чисел отведено: а)  $N=8$  разрядов б)  $N=16$  разрядов. А в качестве численного метода, возьмем самый простой и быстрый – неявный метод Эйлера 1-го порядка.

Согласно ранее приведенной формуле (3), максимальное значение глобальной погрешности не превысит:

- ◆ для  $N = 8, R = \frac{0.4}{10^{-5}} \cdot e^{0.4} \cdot 2^{-9} \leq 100;$
- ◆ для  $N = 16, R = \frac{0.4}{10^{-5}} \cdot e^{0.4} \cdot 2^{-17} \leq 0.45.$

На рис.1 представлены результаты вычислений ( $N = 8$  – рис.1,а;  $N = 16$  – рис.1,б).

Сравнение показывает, что при  $N = 8$  функция даже не убывает, а остается постоянной, что свидетельствует о том, что результат неверен. Это так же подтверждает полученная ранее оценка погрешности, не гарантирующая соблюдение критерия  $R \leq 0.5$ .



а

б

Рис.1. Результаты вычисления: а)  $N = 8$ ; б)  $N = 16$

Поясним полученные результаты. Как известно значение  $y_{i+1}$  на шаге  $i+1$ , получается как сумма предыдущего значения  $y_i$  на шаге  $i$  и некоторого приращения  $\nabla y_{i+1} = h \cdot \varphi(y_{i+1})$ . Вся тонкость вычислений и заключена в этом  $\nabla y_{i+1}$ .

Покажем это более явно. В эксперименте при  $N = 8$  приращение  $\nabla y_{i+1} < 2^{-8}$ , так как  $h = 10^{-5} < (2^3)^{-5} = 2^{-15}$ . В следствии того, что под мантису отводится 8 разрядов, получаем приращение всегда равно 0. Зато, уже при  $N \geq 15$  приращение становится отличным от нуля, что не может не сказаться на точности результата.

**Механизм накопления остатков.** Сам собой напрашивается следующий вопрос – “Как увеличить точность вычисления, когда приращение может частично или полностью не вписаться в отведенное число разрядов”. Нужно воспользоваться таким механизмом, который помог бы учитывать “потерявшиеся” разряды.

Суть этого метода в хранении и использовании остатков приращений  $\nabla y_{i+1}$ , как показано на рис.2. Иными словами, на каждом шаге вычисляется  $\nabla y_{i+1} = h \cdot \varphi(y_{i+1})$ , причем если шаг  $h$  кратен числу 2, то мантисса приращения остается такой же как у  $\varphi(y_{i+1})$ , а изменяется только порядок.

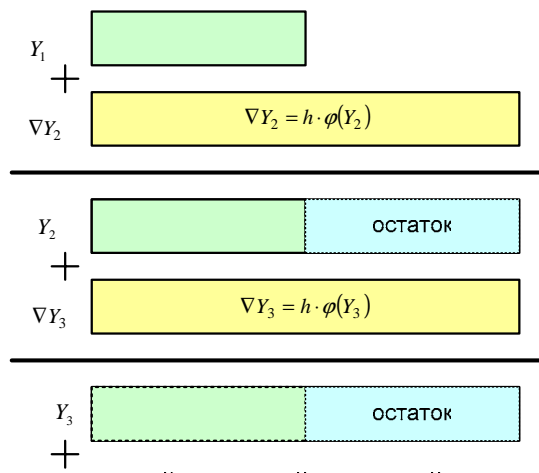


Рис.2. Механизм накопления остатков

Далее приращение складывается с результатом на предыдущем шаге и его остатком. В результате, чего находится новая пара (результат на новом шаге и его остаток). Причем остаток участвует только в сложении с приращением. А при вычислении приращения и других операциях в качестве аргумента функции участвуют только те разряды, которые поместились в мантиссе.

Чтобы показать эффективность этого механизма повышения точности решения, проведем новый эксперимент над задачей описанной выше. Только теперь будем на каждом шаге запоминать остаток приращения в отдельных регистр и использовать его при нахождении очередного значения функции  $y_{i+1}$ . На рис.3 представлены результаты эксперимента. Как видно из графиков максимальная ошибка существенно уменьшилась.

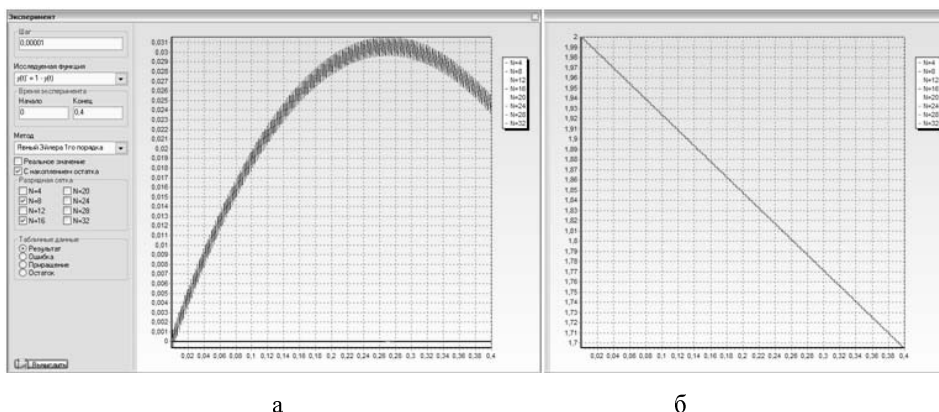


Рис.3. Результаты эксперимента: а) ошибка вычисления; б) результат эксперимента при накоплении остатка

Отметим, что изменение функции происходит в виде пилообразной прямой (новое значение не изменяется, пока сумма остатков не помещается в мантиссе), что косвенно подтверждает правильность работы метода.

Ю.В. Чернухин, Р.В. Сапрыкин

### НЕЙРОСЕТЕВОЙ АЛГОРИТМ САМООБУЧЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ, ИЗУЧАЮЩИХ СВОЙСТВА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

На сегодняшний день построение управляющих систем для мобильных роботов, способных самостоятельно функционировать в условиях постоянно меняющейся внешней среды, остается актуальной проблемой. Суть этой проблемы состоит в том, что для эффективного взаимодействия робота со средой ему необходимо строить собственную внутреннюю модель внешнего мира. Для построения данной модели роботу необходимо иметь как можно больше информации о среде и о свойствах отдельных объектов этой среды. Также робот должен обладать некоторым уровнем интеллекта, чтобы адекватно реагировать на ситуации в среде. Отсюда появилось понятие интеллектуального мобильного робота (ИМР). Так как роботы являются довольно сложными системами и количество их типов велико (шагающие, колесные, летающие, манипуляторы и т.д.), то в последнее время при изучении таких систем широкое распространение получил агентный подход [1]. В соответствии с этим подходом, при представлении ИМР в качестве интеллектуального агента (ИА), появляется возможность абстрактного изучения алгоритмов его поведения, учитывая только важные для исследования факторы. К тому же агентный подход не препятствует распространению теоретических результатов на реальные робототехнические системы, снабженные физически реализованными сенсорными и эффекторными устройствами.

Со второй половины 80-х годов в области искусственного интеллекта появился принципиально новый метод построения систем искусственного интеллекта, существенно отличающийся от предыдущих. Данный метод заключается в том, чтобы имитировать те способы принятия решений, которые предположительно используются животными в их естественной среде обитания. В работах [2,3] пока-