решения навигационной задачи, особенно в условиях избыточной информационной схемы, в общем случае может приводить к невозможности анализа конфигурации аналитическими методами. В этом случае единственно возможным вариантом анализа конфигурации РМ, оценки точности решения навигационной задачи, выработки рекомендаций на пуск и подготовки полетного задания является статистическое моделирование.

По результатам исследований отмечено, что на точность решения навигационной задачи количество радиомаяков влияет в меньшей степени, чем их конфигурация (например, точность решения навигационной задачи при 9 маяках, расположенных практически на одной прямой, будет ниже, чем при 3 маяках, расположенных в углах равностороннего треугольника). Возможность повышения точности вычисления координат ЛА при увеличении избыточности связано, в первую очередь, с вероятностью появления более "удобных" конфигураций подгрупп маяков, которые и должны выбираться для решения навигационной задачи.

Предложенная методика решения навигационной задачи, основанная на возможностях независимого вычисления каждой из координат ЛА, выборе оптимальных подгрупп радиомаяков и алгоритмов для каждой из областей коррекции, позволила получить по результатам моделирования точностные характеристики, соответствующие требованиям определения координат для современных беспилотных маневренных ЛА при выполнении требований по надежности, доступности и непрерывности функционирования АСБРН.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Управление и наведение беспилотных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М.Н.Красильщикова и Г.Г.Серебрякова – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под ред. В.Н.Харисова, А.И.Перова, В.А.Болдина. – М.: ИПРЖР, 1999.
3. Основы теории систем управления высокоточных ракетных комплексов Сухопутных войск / Б.Г.Гурский, М.А.Лющанов, Э.П.Спирин / Под ред. В.Л.Солунина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.

В.С. Васильев

АППРОКСИМАЦИИ В СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ

Системы уравнений. Достаточно общей можно считать следующую систему уравнений мелкой воды [1]:

$$H_t' + div(Hv) + \sigma = 0\,, \tag{1}$$

$$(Hv)_t' + i_\alpha\, div(Hv_\alpha v) + \sigma A v = -H\left(g\; grad\; e + \rho^{-1}\; grad\; a\right) + F^{(l)} + B + W + HCv\,, \tag{2}$$

где $H(t,x,y)$ – высота водного столба в момент времени t в точке с декартовыми координатами x и y; $div\, a = (a_x)_x' + (a_y)_y'$ – дивергенция вектора $a = a_x i + a_y j$; $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ – средние по столбу физические компоненты вектора скорости среды $v = ui + vj = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_\alpha i_\alpha$ (парные строчные греческие буквы традиционно для тензорного исчисления означают суммирование от 1 до размерности пространства $n = 2$); $i_1 = i$, $i_2 = j$ и k – единичные декартовы орты; $\sigma(t, x, y)$ – испаряющийся (при $\sigma < 0$ – выпадающий в виде осадков) в единицу времени водный слой; $A = \left\| a_{ij} \right\|_{2\times 2}$, $a_{11} = a_{22} = s$, $a_{21} = -a_{12} = r$; r и s – коэффициенты, учитывающие отличие (в том числе поворот, предписываемый экмановскими моделями, практикой трехмерных расчетов и подтверждаемый натурными измерениями) скорости $v_e = u_e i + v_e j$, испаряющейся с поверхности воды, от средней по столбу; g – ускорение свободного падения; $grad\, s = s'_x i + s'_y j$ – градиент скаляра s; $e(t, x, y)$ – возвышение уровня свободной поверхности по отношению к невозмущенному состоянию (в однородном поле $g = -gk$ тяжести представляющему собой плоскость); $d(t, x, y)$ – z-координата поверхности дна; $H = e - d$; $\rho = \text{const}$ – плотность среды; $a(t, x, y)$ – атмосферное давление на свободной поверхности; $F^{(l)}$, $l = 0;1;2;3$, B и W – силы вязкого внутреннего трения, трения о дно и трения ветра о свободную поверхность соответственно; $C = \left\| c_{ij} \right\|_{2\times 2}$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = c$ – матрица ускорения Кориолиса; $c = 2\Omega \sin\vartheta$ – параметр Кориолиса; Ω – угловая скорость вращения Земли; ϑ – северная широта.

Рассматриваются следующие дивергентно-недивергентные формы в зависимости от разрешения системы уравнений (1), (2) в усредненных по столбу компонентах вектора скорости u и v (уравнение неразрывности совпадает с (1))

$$v'_t + (1-q)H^{-1}\left(H'_t v + i_\alpha\, div(H v_\alpha v)\right) + q i_\alpha (v, grad\, v_\alpha) + H^{-1}\sigma A_q v =$$
$$= -g\, grad\, e - \rho^{-1}\, grad\, a + H^{-1}\left(F^{(l)} + B + W\right) + Cv, \qquad (3)$$

или в полных потоках $U = Hu$ и $V = Hv$ ($\mathbf{V} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$)

$$H'_t + div V + \sigma = 0, \qquad (4)$$

$$V'_t - qH'_t v + i_\alpha\left((1-q)div(v_\alpha V) + q(V, grad\, v_\alpha)\right) + \sigma A_q v =$$
$$= -H\left(g\, grad\, e + \rho^{-1}\, grad\, a\right) + F^{(l)} + B + W + CV. \qquad (5)$$

Наличие интенсивности испарения σ в уравнении неразрывности делает несоленоидальным даже стационарное поле скоростей. Соленоидальным будет стационарное поле (U, V) в отсутствии испарения. В этом случае по смыслу функции тока ψ: $Hu = \psi'_y$, $Hv = -\psi'_x$. Введением вихря $\omega = u'_y - v'_x$ удается исключить из уравнений градиент возвышения уровня e:

$$\omega'_t + div(\omega v) + \left(H^{-1}\sigma((s-1)u - rv)\right)'_y - \left(H^{-1}\sigma(ru + (s-1)v)\right)'_x =$$
$$= \left(H^{-1}\left(F_x^{(l)} + B_x + W_x\right)\right)'_y - \left(H^{-1}\left(F_y^{(l)} + B_y + W_y\right)\right)'_x + c\, div\, v.$$

Но и в стационарном случае при отсутствия испарения исключить из уравнений полную глубину H не удается:

$$div(\omega v) = \left(H^{-1}\left(F_x^{(l)} + B_x + W_x\right)\right)'_y - \left(H^{-1}\left(F_y^{(l)} + B_y + W_y\right)\right)'_x + c\, div\, v,$$

$$\left(H^{-1}\psi'_x\right)'_x + \left(H^{-1}\psi'_y\right)'_y = \omega.$$

Это лишает преимуществ методы, основанные на введении динамических переменных «функция тока – вихрь». Результаты, представленные далее, имеют принципиальное значение для построения *трехмерной* модели мелкого моря.

Во многих моделях морской гидродинамики на свободной поверхности задаются ветровые напряжения. Однако формат собираемой метеоинформации таков, что скорость и направление ветра измеряются на некоторой высоте (условия дальнего поля). Для численного метода не должен быть непреодолимым переход к двух- или многослойной модели вязких несмешивающихся сред со свободными поверхностями раздела. Бесспорно, что морская вода неоднородна по солевому составу в открытом море и в эстуариях рек, т.е. речь не может идти о среде с постоянной плотностью. В то же время вполне допустимо ограничиться приближением возмущенной плотности. Численный метод должен быть рассчитан и на это. Перечисленные обстоятельства (несоленоидальность поля скоростей, отсутствие качественных изменений при переходе от двух измерений к трем, возможность обобщения на случай многослойности и возмущенной плотности) останавливают выбор на методе расщепления по физическим процессам – методе поправки к давлению (MAC-technique).

Применительно к системе (1), (3) расщепление будет иметь вид:

$$\tilde{v} = v + \tau\left(H^{-1}\left(F^{(l)} - (1-q)i_\alpha\, div(Hv_\alpha v) - \sigma A_q v + B + W\right) - qi_\alpha\left(v, grad\, v_\alpha\right) + Cv\right), \quad (6)$$

$$\hat{H} + \tau\, div\left(\hat{H}\left(\tilde{v} - \tau\left(g\, grad\, \hat{e} + \rho^{-1}\, grad\, a\right)\right) - (1-q)\left(\hat{H} - H\right)v\right) = H - \tau\sigma, \quad (7)$$

$$\hat{v} = \tilde{v} - \tau\left(g\, grad\, \hat{e} + \rho^{-1}\, grad\, a\right) - (1-q)\hat{H}^{-1}\left(\hat{H} - H\right)v, \quad (8)$$

а применительно к системе (4), (5) – вид:

$$\tilde{V} = V + \tau\left(F^{(l)} - i_\alpha\left((1-q)div\left(v_\alpha V\right) + q\left(V, grad\, v_\alpha\right)\right) + qH'_t v - \sigma A_q v + B + W + CV\right), \quad (9)$$

$$\hat{H} - \tau^2\, div\left(\hat{H}\left(g\, grad\, \hat{e} + \rho^{-1}\, grad\, a\right)\right) = H - \tau\left(div\tilde{V} + \sigma\right), \quad (10)$$

$$\hat{V} = \tilde{V} - \tau\hat{H}\left(g\, grad\, \hat{e} + \rho^{-1}\, grad\, a\right), \;\; \hat{v} = \hat{H}^{-1}\hat{V}. \quad (11)$$

Сеточные уравнения (7) и (10) получаются подстановкой сеточных уравнений (8) и (11) в сеточные уравнения (1) и (4) соответственно.

Различные модели B и W можно найти в [1,2]. Традиционной в моделях мелкой воды является

$$F^{(0)} = Hi_\alpha\, div\left(\lambda^{(0)}\, grad\, v_\alpha\right),$$

где $\lambda^{(l)}$, $l = 0;1;2;3$ – коэффициенты турбулентного обмена.

В силу преобразования

$$H\left(\lambda^{(0)} f'_\chi\right)'_\chi f = \left(H\lambda^{(0)} f'_\chi f\right)'_\chi - \lambda^{(0)} f'_\chi \left(Hf\right)'_\chi,$$

где f – компонента u или v; χ – координата x или y, произведение соответствующих компонент $F^{(0)}$ и $\mathbf{v}$ может быть приведено к виду:

$$F_i^{(0)} v_i = Hv_i\, div\left(\lambda^{(0)}\, grad\, v_i\right) = div\left(H\lambda^{(0)} v_i\, grad\, v_i\right) - \lambda^{(0)}\left(grad\, v_i, grad\left(Hv_i\right)\right).$$

Благодаря дивергентному виду первого слагаемого интеграл от него по области преобразуется в интеграл по границе области (формула Гаусса), что означает выполнение балансовых соотношений (для формы $H\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$). Второе слагаемое (и интеграл от него) не обладают знакоопределенностью, что не гарантирует строгую диссипацию механической энергии за счет действия сил вязкого внутреннего трения. В то же время каждое из уравнений движения вязкой *несжимаемой* жидкости и система (в целом) уравнений движения вязкой *сжимаемой* жидкости строгой диссипативностью обладают. Должна ее наследовать и система уравнений мелкой воды.

Вообще говоря, знакоопределенное слагаемое выделяется в произведении

$$H^{-1}F_i^{(0)}v_i = v_i\,div\left(\lambda^{(0)}\,grad\,v_i\right) = div\left(\lambda^{(0)}v_i\,grad\,v_i\right) - \lambda^{(0)}\left(grad\,v_i, grad\,v_i\right).$$

Но строгая диссипация механической энергии должна быть присуща уравнению баланса интеграла энергии, а не уравнению динамики некоторой квадратичной формы усредненных компонент вектора скорости.

В [3] приводятся две модели сил вязкого внутреннего трения

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{i}_\alpha\,\mathrm{div}\left(H\lambda^{(1)}\,\mathrm{grad}\,v_\alpha\right),\ F^{(2)} = Hi_\alpha\,div\left(H^{-1}\lambda^{(2)}\,grad\left(Hv_\alpha\right)\right),$$

в силу преобразований

$$\left(H\lambda^{(1)}f'_\chi\right)'_\chi f = \left(H\lambda^{(1)}f'_\chi f\right)'_\chi - H\lambda^{(1)}\left(f'_\chi\right)^2,$$

$$H\left(H^{-1}\lambda^{(2)}\left(Hf\right)'_\chi\right)'_\chi f = \left(\lambda^{(2)}\left(Hf\right)'_\chi f\right)'_\chi - H^{-1}\lambda^{(2)}\left(\left(Hf\right)'_\chi\right)^2$$

строгой диссипативностью обладающие:

$$F_i^{(1)}v_i = v_i\,div\left(H\lambda^{(1)}\,grad\,v_i\right) = div\left(H\lambda^{(1)}v_i\,grad\,v_i\right) - H\lambda^{(1)}\left(grad\,v_i, grad\,v_i\right), \tag{12}$$

$$F_i^{(2)}v_i = Hv_i\,div\left(H^{-1}\lambda^{(2)}\,grad\left(Hv_i\right)\right) =$$
$$= div\left(\lambda^{(2)}v_i\,grad\left(Hv_i\right)\right) - H^{-1}\lambda^{(2)}\left(grad\left(Hv_i\right), grad\left(Hv_i\right)\right), \tag{13}$$

но отличающиеся от ньютоновой. В то же время интегрирование компоненты ньютоновой вязкой силы $\mathrm{div}_{(3)}\left(\lambda\,\mathrm{grad}_{(3)}\,f\right)$ по вертикали z от поверхности дна d до свободной поверхности e дает ($\lambda = \mathrm{const}$) [4]:

$$\int_d^e div_{(3)}\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)dz = div\left(\int_d^e \lambda\,grad\,f dz\right) + \left(\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)_e, n_e\right) - \left(\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)_d, n_d\right) =$$

$$= div\left(\lambda\,grad\left(\int_d^e f dz\right)\right) + 2\left(\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)_e, n_e\right) - 2\left(\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)_d, n_d\right) -$$

$$- f_e\,div\left(\lambda\,grad\,e\right) - \left(\lambda f'_z\right)_e\left(n_e, n_e\right) + f_d\,div\left(\lambda\,grad\,d\right) + \left(\lambda f'_z\right)_d\left(n_d, n_d\right),$$

где $div_{(3)}\left(a_x i + a_y j + a_z k\right) = \left(a_x\right)'_x + \left(a_y\right)'_y + \left(a_y\right)'_y$;

$grad_{(3)}\,f = f'_x i + f'_y j + f'_z k$, f – компонента u или v; $n_e = -grad\,e + k$, $n_d = -grad\,d + k$; $f_s = f\big|_{z=s}$, $\left(\lambda f'_z\right)_s = \left(\lambda f'_z\right)\big|_{z=s}$, $\left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)_s = \left(\lambda\,grad_{(3)}\,f\right)\big|_{z=s}$, s – поверхность d или e, и использовано

$$\int_d^e div_{(3)}\, adz = \int_d^e div_{(3)}\left(a_x i + a_y j + a_z k\right)dz = div\left(\int_d^e \left(a_x i + a_y j\right)dz\right) + \left(a_e, n_e\right) - \left(a_d, n_d\right),$$

$$\int_d^e grad\ fdz = grad\left(\int_d^e fdz\right) - f_e\, grad\, e + f_d\, grad\, d\ ,$$

$$grad\left(f_s\right) = \left(grad\ f\right)_s + \left(f_z'\right)_s grad\ s = \left(grad_{(3)}\ f\right)_s - \left(f_z'\right)_s n_s\,.$$

Слагаемые $\left(\left(\lambda\, grad_{(3)}\ f\right)_e, n_e\right)$ и $\left(\left(\lambda\, grad_{(3)}\ f\right)_d, n_d\right)$, непрерывные на границах раздела несмешивающихся вязких сред с различными λ, составляют компоненты обобщенных сил трения ветра $W = 2i_\alpha\left(\left(\lambda\, grad_{(3)}\, v_\alpha\right)_e, n_e\right)$ и трения о дно $B = -2i_\alpha\left(\left(\lambda\, grad_{(3)}\, v_\alpha\right)_d, n_d\right)$.

Слагаемые $f_e\, div\left(\lambda\, grad\, e\right)$, $f_d\, \mathrm{div}\left(\lambda\, \mathrm{grad}\, d\right)$ и $\left(\lambda f_z'\right)_e\left(n_e, n_e\right)$, $\left(\lambda f_z'\right)_d\left(n_d, n_d\right)$, разрывные на границах раздела сред (полусуммы таких слагаемых для сред выше и ниже поверхности раздела также могут быть отнесены на счет обобщенных сил B и W), указывают на существование еще одного диссипативного фильтра

$$F^{(3)} = i_\alpha\, div\left(\lambda^{(3)}\, grad\left(Hv_\alpha\right)\right) - \tfrac{1}{2} v\, div\left(\lambda^{(3)}\, grad\ H\right),$$

для которого в силу преобразования

$$\left(\lambda^{(3)}\left(Hf\right)_\chi'\right)_\chi' f - \tfrac{1}{2} f^2\left(\lambda^{(3)} H_\chi'\right)_\chi' = \left(\lambda^{(3)}\left(\tfrac{1}{2} Hf^2\right)\right)_\chi' - H\lambda^{(3)}\left(f_\chi'\right)^2$$

выполняется

$$F_i^{(3)} v_i = v_i\, div\left(\lambda^{(3)}\, grad\left(Hv_i\right)\right) - \tfrac{1}{2} v_i^2\, div\left(\lambda^{(3)}\, grad\ H\right) =$$
$$= div\left(\lambda^{(3)}\, grad\left(\tfrac{1}{2} Hv_i^2\right)\right) - H\lambda^{(3)}\left(grad\, v_i, grad\, v_i\right). \qquad (14)$$

Криволинейная сетка и сеточные функции. Общепринято, что элементом криволинейной сетки, для которого формулируется закон сохранения массы, является ячейка. Наиболее «прозрачную» нотацию уравнения баланса массы предоставляет использование разнесенной сетки, когда различные сеточные функции задаются на различных ее элементах (узлах, ребрах, гранях, ячейках). Коэффициенты разложения по финитным базисным функциям, равным 1 на одном из элементов сетки и 0 на всех остальных, в конечно-элементных аппроксимациях также можно рассматривать как значения физических величин, заданные на элементах сетки. Задание контравариантных компонент на гранях или ковариантных на ребрах не является единственно возможным. Заметим, что число узлов и число ячеек на сетке достаточно большой размерности по каждому направлению примерно совпадают, а число ребер и число граней превосходит их приблизительно (на двумерной сетке) вдвое. Задание на криволинейной сетке только одной компоненты вектора на ее элементе, например, только тех контравариантных компонент на соответствующих гранях, которые используются в нотации уравнения неразрывности

$$J\left(H_t' + \sigma\right) + \left(JHv^1\right)_\xi' + \left(JHv^2\right)_\eta' = 0\,,$$

где $J = x'_\xi y'_\eta - x'_\eta y'_\xi = D(x,y)/D(\xi,\eta)$ – якобиан преобразования координат $(x,y) \to (\xi,\eta)$; v^1, v^2 – контравариантные компоненты вектора v; $Jv^1 = y'_\eta u - x'_\eta v$; $Jv^2 = x'_\xi v - y'_\xi u$, означает отсутствие сеточного закона сохранения импульса (неконсервативность схемы). Добиться выполнения векторных законов сохранения, используя усредняющие сеточные проекторы, проблематично. Поэтому и пара контравариантных, и пара ковариантных компонент должны рассчитываться из уравнений движения, а не усредняться сеточными проекторами. Но это делает размерности пространств компонент сеточного вектора скорости v примерно вдвое превосходящими (вслед за мощностями множеств ребер и граней по сравнению с мощностями множеств узлов и ячеек) размерность пространства сеточной функции возвышения уровня e. Использование сеточных проекторов для скалярных функций (возвышение уровня e, полная глубина H) допустимо. Тем более, что альтернативный подход, состоящий в прямом увеличении размерности сеточной функции возвышения уровня e, фактически означает введение в рассмотрение новой сетки, у которой уравнение баланса массы формулируется не только для ячеек, но и для областей, например, охватывающих узлы. Если при этом система сеточных уравнений распадается на две подсистемы, использующие скалярные сеточные функции только одного подмножества (только заданные на ячейках или только заданные в узлах), и нет влияния друг на друга (или оно слабо) сеточных функций разных подмножеств, то между этими подмножествами сеточного решения возникают осцилляции, делающие вычислительный процесс неустойчивым. Поэтому векторные сеточные функции задаются всеми компонентами в узлах, а скалярные – во внутренних точках ячеек сетки. По сравнению с таким подходом задание контравариантных компонент на гранях или ковариантных на ребрах проявляется в определенном улучшении диссипативных и дисперсионных свойств оператора сеточного уравнения для функции возвышения уровня e в смысле подавления осцилляций на элементах одного из подмножеств, но это предмет отдельного исследования, а «плата» за это указана выше.

Но тогда утрачивается преимущество использования контравариантных или ковариантных компонент перед декартовыми. Тем более, что окончательное представление решения все равно потребует преобразования к декартовым компонентам, что на сильно искривленных сетках может сопровождаться искажением решения (вплоть до потери аппроксимации). Кроме того, использование декартового базиса при разложении векторных величин позволяет получать дивергентную форму уравнений динамики для каждой компоненты в отдельности, а не только для системы в целом (уравнения динамики и уравнения баланса совпадают). Это является следствием того, что пространственные производные базисных векторов равны нулевым векторам (или, что тоже самое, символы Кристоффеля тождественно равны нулю). Аналогичная ситуация имеет место при использовании триангулярных сеток. Там ребра не связаны с координатными линиями, а грани с координатными поверхностями, и использование декартового базиса может восприниматься безальтернативным.

В силу разложения векторных величин по декартовому базису по уравнениям динамики различных компонент вектора скорости оказываются распределенными компоненты e'_x и e'_y вектора $grad\, e$ (а не e'_ξ, e'_η и не $g^{11}e'_\xi + g^{12}e'_\eta$, $g^{21}e'_\xi + g^{22}e'_\eta$). Но тогда для сопряженности сеточных операторов дивергенции вектора и градиента скаляра естественно, чтобы аппроксимация дивергенции вектора была аддитивной аппроксимацией производных декартовых компонент вектора по декартовым координатам (в угловые скобки будем заключать аппроксимируемые выражения, а нижними индексами будем отмечать отнесение к элементу сетки: (i,j) – узлу; $(i+\frac{1}{2},j)$ и $(i,j+\frac{1}{2})$ – граням (ребрам); $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$ – ячейке):

$$\left\langle div\, a\varDelta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle (a_x)_x^{\prime}\varDelta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \left\langle (a_y)_y^{\prime}\varDelta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

где $\varDelta$ – обозначение конечного объема $Jh_\xi h_\eta$; h_ξ и h_η – шаги по координатным направлениям ξ и η.

Аппроксимации потоков вектора **v** через грани $(i,j+\frac{1}{2})$ и $(i+\frac{1}{2},j)$

$$\left\langle JHv^1 h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} = \left\langle y'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle Hu\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} - \left\langle x'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle Hv\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}},$$

$$\left\langle JHv^2 h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = \left\langle x'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle Hv\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} - \left\langle y'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle Hu\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j},$$

где $\left\langle f'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = f_{i+1,j} - f_{i,j}$; $\left\langle f'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} = f_{i,j+1} - f_{i,j}$, в зависимости от разрешения системы следующим образом выражаются через усредненные компоненты вектора скорости:

$$\left\langle Hf\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\,\bar{f}^{(\xi)}_{i+\frac{1}{2},j},\quad \left\langle Hf\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\,\bar{f}^{(\xi)}_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (15)$$

или через интегралы (полные потоки):

$$\left\langle Hu\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} = \overline{U}^{(\eta)}_{i,j+\frac{1}{2}},\ \left\langle Hv\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} = \overline{V}^{(\eta)}_{i,j+\frac{1}{2}},\ \left\langle Hu\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{U}^{(\xi)}_{i+\frac{1}{2},j},\ \left\langle Hv\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{V}^{(\xi)}_{i+\frac{1}{2},j}, \qquad (16)$$

где $\bar{f}^{(\xi)}_{\pi,\varsigma} = \frac{1}{2}\left(f_{\pi-\frac{1}{2},\varsigma} + f_{\pi+\frac{1}{2},\varsigma}\right)$; $\bar{f}^{(\eta)}_{\pi,\varsigma} = \frac{1}{2}\left(f_{\pi,\varsigma-\frac{1}{2}} + f_{\pi,\varsigma+\frac{1}{2}}\right)$; (π,ς) – элемент сетки (узел, ребро, грань или ячейка).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.: ил.
2. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. – СПб.: Наука, 1991. – 200 с.
3. *Agoshkov V.I., Saleri F.* Recent Developments in the Numerical Simulation of Shallow Water Equations. III – Boundary Conditions and Finite Element Approximations in the River Flow Calculations // Матем. моделирование, 1996, Т.8, № 9. – С. 3-24.
4. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование, 2003, Т.15, №10. – С. 17-34.

А.Ю. Молчанов

ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

При управлении сложными техническими объектами или процессами возникают задачи оптимизации функционирования. Под оптимизацией понимают минимизацию или максимизацию определенным образом заданного критерия, характе-