

О.В. Исламова

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОДВЕШЕННОЙ ТЯЖЁЛОЙ НИТИ

**Введение.** В последние годы наблюдается повышение интереса к механике тяжёлых гибких нитей и струн<sup>1</sup>. Математическая постановка для некоторых таких задач рассмотрена в известной монографии [1], собственно вопросы механики – в [2].

В качестве источников колебаний гибких тяжёлых нитей рассматриваются кинематические возмущения концов; распределённые нагрузки, возникающие от взаимодействия с окружающей средой. При этом как кинематические, так и динамические возмущения в проведённых исследованиях приняты, как правило, детерминистическими и скалярными. Кроме того, решение задач зачастую связано с громоздкими преобразованиями, с использованием неудобных функций Бесселя различных родов и порядков. Можно показать, что эти сложности могут быть преодолены универсальными численными методами, более того для сложных задач они, по-видимому, являются единственным способом решения.

Стохастические краевые задачи и колебания, вызванные векторными возмущениями, не рассмотрены. Задача о свободных колебаниях тяжёлой подвешенной нити подробно изучена в работе [3].

В данной работе рассматриваются установившиеся режимы колебаний нити при гармонических и случайных возмущениях верхнего конца.

На рис.1 изображена тяжёлая однородная струна длиной  $l$ , закреплённая верхним концом, перемещения которого в горизонтальном направлении описывается функцией  $f(t)$  и нагруженная вдоль оси равномерно распределённым собственным весом  $p$ . Рассмотрим элементарный участок длиной  $dx$  (рис.2). Функцию перемещений струны в поперечном направлении обозначим  $u(x, t)$  и примем её значения достаточно малыми, что позволит считать углы наклона касательных к изогнутой оси равными производной  $u'$ , вообще, приведёт к линейной задаче.

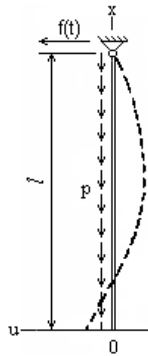


Рис.1. Расчётная схема

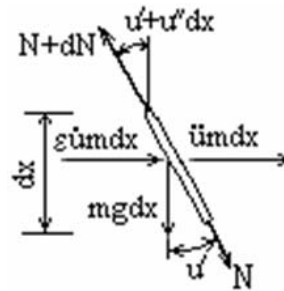


Рис.2. Элемент струны

Используя принцип Даламбера, выпишем уравнение движения элемента струны в проекциях на ось  $u$ :

$$\sum U = 0, \quad -Nu' + (N + dN)(u' + u''dx) - mudx - \epsilon ümdx = 0, \quad (1)$$

где  $N(x)$  – продольная сила в сечении струны:

$$N(x) = px, \quad m = \rho A; \quad (2)$$

<sup>1</sup> Тяжёлой называется струна, в математической модели колебаний которой учитывается собственный вес.

$m$  – погонная масса;  $\rho$  – плотность материала;  $A$  – площадь поперечного сечения струны;  $p = mg$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\varepsilon$  – коэффициент удельного линейного вязкого трения.

Точки над символами и штрихи в верхних индексах означают дифференцирование по времени и пространственной координате соответственно.

Подставив (2) в (1) и проведя несложные преобразования, получим основное уравнение динамики струны:

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} - gu' - gxu' = 0, \quad t > -\infty, \quad (3)$$

$$(x, t) \in Q \equiv [(x, t) : x \in L \equiv (0, l), t \in R^1]$$

и граничные условия<sup>2</sup>

$$u(0, t) + \varepsilon u(0, t) - gu'(0, t) = 0, \quad u(l, t) = f(t), \quad t > -\infty. \quad (4)$$

Задача о свободных колебаниях тяжёлой струны, при  $f(t) \equiv 0$ , подробно рассмотрена в работе [3]. Получены спектры собственных частот и форм методами конечных разностей и по координатного спуска.

**Вынужденные гармонические колебания.** Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания при гармонических возмущениях. С этой целью возмущение верхнего конца примем в виде:

$$f(t) = e^{j\Omega t}, \quad \Omega - \text{частота.}$$

Решение задачи (3), (4) отыскивается с помощью метода разделения переменных как произведение:

$$u(x, t) = H(x)e^{j\Omega t}, \quad (5)$$

где  $H(x)$  – передаточная функция. Подстановка (5) в (3), (4) даёт краевую задачу:

$$xH'' + H' - \gamma H = 0, \quad \gamma = [(j\Omega)^2 + 2\varepsilon(j\Omega)]/g, \quad (6)$$

$$H'(0) - \gamma H(0) = 0, \quad H(l) = 1. \quad (7)$$

Далее воспользуемся методом конечных разностей. С этой целью вместо подобласти  $L+\Gamma$ , ( $\Gamma = \{0, l\}$  – граничные точки) введём дискретную область  $L_h$  в виде узлов равномерной сетки с шагом  $h$ :

$$L_h \equiv [x_i : x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, n], \quad h = l/(n-1).$$

Здесь  $n$  – количество узлов сетки. Производные в (6), (7) заменим конечно-разностными производными и придём к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$C(j\Omega)y = d, \quad (8)$$

где  $d^T = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$ ,  $y^T = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  – вектор, компонентами которого являются значения передаточной сеточной функции,  $C(j\Omega)$  – квадратная матрица порядка  $n$ :

$$C(j\Omega) = \begin{pmatrix} \sigma & -4 & 1 & & \vdots & & & & & \\ a_2 & -c_2 & b_2 & & \vdots & & & & & \\ & a_3 & -c_3 & b_3 & \vdots & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \vdots & a_{n-2} & -c_{n-2} & b_{n-2} & & \\ & & & & \vdots & & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} & \\ & & & & \vdots & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup> Для установившихся колебаний, которые ниже изучаются, начальные условия не требуются.

Здесь  $a_i = \frac{x_i}{h^2} - \frac{1}{2h}$ ,  $c_i = \frac{2x_i}{h^2} + \gamma$ ,  $b_i = \frac{x_i}{h^2} + \frac{1}{2h}$ ,  $\sigma = 2h\gamma + 3$ .

В развёрнутой форме система уравнений (8) имеет вид:

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2, \quad a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad y_n = 1, \quad (9)$$

где

$$\alpha_2 = (4b_2 - c_2)/(\sigma b_2 - a_2), \quad \beta_2 = 0.$$

Систему уравнений (9) лучше всего решать методом прогонки [4]. Прогоночные коэффициенты находятся по формулам:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + d_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Затем вычисляются компоненты вектора  $y$  по рекуррентной формуле:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Передачная функция получена для гармонического возмущения с единичной амплитудой. В реальном же случае она равна  $a$ . Тогда амплитуда колебаний струны определяется формулой:

$$A_i(x_i) = a|y_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Пример 1.** Рассмотрим стальную струну диаметром  $d$  с параметрами

$$l = 1 \text{ м}, \quad \varepsilon = 0,1 \text{ с}^{-1}, \quad a = 10 \text{ мм}, \quad d = 3 \text{ мм}, \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^2, \quad n = 101.$$

Первые три элемента спектра собственных частот по [3] имеют значения:

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{3,781; 8,719; 13,723\} \text{ с}^{-1}.$$

Изучим зависимость амплитуды колебаний  $A(x)$  от частоты возмущений. С этой целью построена серия кривых, изображённых на рис.3. Номера линий соответствуют следующим частотам:

$$\Omega = 0(\text{прямая } 1) \text{ с}^{-1}; \quad 3,1(\text{кривая } 2) \text{ с}^{-1}; \quad 3,4(3) \text{ с}^{-1}; \quad 7,5(4) \text{ с}^{-1}; \quad 12,7(5) \text{ с}^{-1}.$$

Анализ линий показывает следующее. Прямая 1 (рис.3) определяет перемещение струны как твёрдого тела, что по существу соответствует статической задаче. При увеличении частоты возмущений амплитуды колебаний возрастают, так как колебания постепенно приближаются к резонансным (кривые 2, 3). Форма колебаний при этом совпадает с первой собственной. Совпадение частоты  $\Omega$  с первой и последующими собственными частотами приводит к резонансным колебаниям с большими отклонениями (соответствующие линии здесь не приводятся).

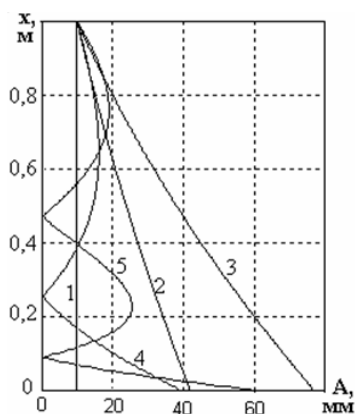


Рис.3. Амплитуды колебаний

Превышение частотой возмущений первой собственной частоты  $\omega_1$ , приводит к постепенному переходу формы колебаний с первой на вторую (кривая 4). При дальнейшем увеличении частоты в форме колебаний появляется многоволновость (кривая 5), что свидетельствует о колебаниях по высшим формам.

**Вынужденные случайные колебания.** В задаче о случайных колебаниях возмущения верхнего конца  $f(t)$  являются центрированным стационарным случайным процессом. По заданной спектральной плотности  $S_f(\omega)$  требуется найти спектральную плотность и дисперсию выходного стационарного случайного поля  $u(x, t)$ .

Для определения спектральной плотности воспользуемся передачной функцией, ранее

найденной для гармонических колебаний в виде сеточной функции  $y_i(x_i)$  Тогда иско-  
мая спектральная плотность случайного процесса определяется следующим образом:

$$S_u(x_i, \omega) = y_i(x_i) y_i^*(x_i) S_f(\omega). \quad (10)$$

Здесь звёздочка в верхнем индексе означает переход к комплексно-  
сопряжённой величине.

Для определения дисперсии применяется известная формула:

$$D_u(x_i) = 2 \int_0^{\infty} S_u(x_i, \omega) d\omega. \quad (11)$$

Подынтегральная функция  $S_u(x_i, \omega)$  чаще всего является такой, что инте-  
грал в (11) оказывается нетабличным и вычислить его аналитическими методами  
затруднительно. Удобнее всего применить численные методы. Но при этом есть  
сложность выбора предела и шага интегрирования. Они определяются с помощью  
численных экспериментов. При этом следует иметь в виду, что функция  $S_u(x_i, \omega)$   
имеет острые всплески на собственных частотах колебаний и характерных частотах  
возмущений.

Рассмотрим эти вопросы подробнее. Сначала обратимся к определению верх-  
него предела интегрирования. Известно, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S_u(x_i, \omega) = 0, \quad x \in L_n. \quad (12)$$

Введём для точек струны вдоль оси  $x$ -ов вектор

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_i = (i-1)\Delta x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad \Delta x = l/(n-1),$$

где  $\Delta x$  – шаг разбивки длины струны на малые отрезки. Каждой компоненте век-  
тора  $\mathbf{X}$  ставится в соответствие значение функции спектральной плотности (10).

Для функции  $S_u(x_i, \omega)$  введём  $l$  – норму. С учётом того, что спектральная  
плотность положительная величина, её можно записать в виде:

$$\|S_u(\mathbf{X}, \omega)\| = \sum_{i=1}^n S_u(x_i, \omega), \quad \omega \in [0, \infty). \quad (13)$$

При постепенном увеличении  $\omega$  в силу (12) норма (13) будет уменьшаться.  
Тогда можно с грубым шагом, увеличивая  $\omega$ , отыскать такое её наименьшее зна-  
чение  $\Omega$ , удовлетворяющее условию

$$\|S_u(\mathbf{X}, \Omega)\| < \mu, \quad (14)$$

где  $\mu$  – априорно задаваемое малое положительное число. Таким образом, уста-  
навливается область численного интегрирования как сегмент  $[0, \Omega]$ .

При определении верхнего предела интегрирования можно воспользоваться  
следующим приёмом, может быть, не таким математически безупречным, но про-  
стым и дающим достаточную точность для практических расчётов. Он основан на  
возможности быстрой визуализации результатов счёта на экране компьютера кри-  
вой зависимости нормы  $\|S_u(\mathbf{X}, \Omega)\|$  от частоты возмущений  $\omega$ . По такому графику  
нетрудно увидеть область для практически значимых вычислений по интегрирова-  
нию, т. е. определить верхний предел, удовлетворяющий условию (14).

Для выбора шага интегрирования назначим некоторое целое число  $M_1$  и шаг  
интегрирования вычислим как

$$\Delta\omega = \Omega / M_1. \quad (15)$$

На оси  $\omega$  узловые точки будут иметь координаты

$$\omega_k = (k-1/2)\Delta\omega, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Приближенное значение дисперсии вычисляется методом прямоугольников по формуле, вытекающей из (11):

$$D_u(x_i, M_1) = 2\Delta\omega \sum_{k=1}^{M_1} y^T(x_i) y^*(x_i) S_f(\omega_k), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

В силу (12) слагаемые суммы (16) на бесконечности обращаются в нуль. Введём норму, аналогичную (13):

$$\|D_u(X, M_1)\| = \sum_{i=1}^n D_u(x_i, M_1). \quad (17)$$

Далее увеличиваем значение  $M_1$ , что соответствует уменьшению шага интегрирования, и повторяем счёт по формулам (15)-(17). Такой итерационный процесс вычислений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие сходимости по введённой норме:

$$\|D_u(X, M_r)\| - \|D_u(X, M_{r-1})\| / \|D_u(X, M_r)\| < \delta, \quad (18)$$

где  $\delta$  – априорно задаваемое малое положительное число (точность вычислений);  $r$  – номер итерации. Результаты последней итерации, удовлетворяющие (18), считаются окончательными значениями дисперсии.

**Пример 2.** Для выполнения вычислений возьмём струну, которая рассмотрена в примере 1.

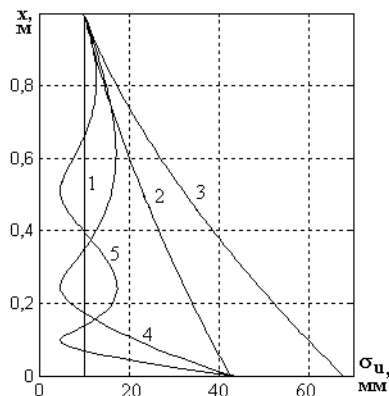


Рис.4. Среднеквадратические отклонения

Пусть возмущение верхнего конца будет процессом со скрытой периодичностью. Тогда его спектральная плотность имеет вид:

$$S_f(\omega) = \frac{2\alpha\theta^2\sigma_f^2}{\pi[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]},$$

$$\theta^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры широкополосности и характерной частоты  $\sigma_f$  – среднеквадратические отклонения процесса  $f(t)$ . Такая модель позволяет при предельных переходах сделать случайные возмущения сколь угодно близкими к гармоническим. В этом случае детерминистическую задачу можно рассматривать как частный случай стохастической задачи. Стохастическая задача в этом случае становится тестовой, т.е. решения стохастической и детерминистической задач должны быть близкими (или даже совпадать).

Выберем характеристики входного случайного процесса по указанным изображениям. Среднеквадратические отклонения возмущений возьмём равными действительным амплитудам гармонических возмущений:  $\sigma_f = 10$  мм.

Параметр широкополосности возьмём небольшим:  $\alpha = 0,05$  с<sup>-1</sup>. Характерные частоты примем совпадающими с частотами гармонических возмущений  $\beta = 0$  (прямая 1) с<sup>-1</sup>; 3,1(кривая 2) с<sup>-1</sup>; 3,4(3) с<sup>-1</sup>; 7,5(4) с<sup>-1</sup>; 12,7 (5) с<sup>-1</sup>.

Номера кривых здесь указаны по рис.4, где представлены результаты вычислений. Из-за малого значения параметра широкополосности случайные колебания близки к гармоническим колебаниям. Видно, что кривые близки к соответствующим кривым (см. рис.3).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
2. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 240 с.
3. Культербаев Х.П., Исламова О.В. Численное моделирование колебаний тяжелой струны. Математическое моделирование и краевые задачи. – Нальчик: Каб.-Балк. университет, 2006. – С. 8-17.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

Ю.Ю. Восевдин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ  
ПОСТРОЕНИЯ МЕТАПОИСКОВЫХ СИСТЕМ

**Введение.** Постоянно увеличивающийся объем информации в сети Интернет (по некоторым оценкам по экспоненциальному закону) порождает проблему поиска релевантной информации по запросу пользователя. Классические методы поиска информации в сети используют поисковые машины (ПМ). Поисковая машина представляет собой сложную систему, состоящую из следующих компонентов:

- ◆ системы автоматического анализа (индексации) Интернет - страниц;
- ◆ базы данных для хранения информации об этих страницах;
- ◆ Web интерфейса, с помощью которого пользователь вводит поисковый запрос;
- ◆ системы анализа запроса и поиска соответствующего запросу (релевантного) документа в базе данных поисковых образов;
- ◆ системы ранжирования найденных документов с учетом пользовательских оценок.

Как правило, большинство пользователей просматривает не более 15-20 первых найденных поисковой системой документов. Поэтому крайне важно, чтобы в это число попали документы, релевантные его запросу. Системы ранжирования различных поисковых систем могут значительно различаться и строиться таким образом, чтобы удовлетворить информационные потребности максимального количества пользователей, при этом им приходится противодействовать недобросовестным рекламодателям, которые пытаются с помощью некорректных технических методов добиться неоправданно высокой оценки своих Интернет ресурсов.

Объединить достоинства нескольких поисковых систем позволяют метапоисковые системы. Обычно, эти системы не имеют собственных индексных баз данных, поэтому перенаправляют запросы пользователей другим поисковым системам, в том числе, метапоисковым. Такого рода системы решают следующие задачи:

- ◆ Обработка запроса пользователя с целью приведения его к соответствующей для поисковых систем форме. При этом возможно как приведение запроса к нормальной морфологической форме, так расширение запроса, путем добавления к нему наиболее распространенных морфологических форм термов запроса.
- ◆ Отправка запросов в различные поисковые системы. В этом случае пользователю предлагается задать поисковую стратегию, т.е. указать, в каких поисковых системах, по его мнению, наиболее вероятно обнаружение релевантных документов.