

Д.Н. Ястребинская

## МНОГОПРОДУКТОВАЯ ЗАДАЧА О ДОПУСТИМОСТИ В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**Введение.** Многие сложные системы имеют сетевую структуру и являются территориально-распределенными. К таким системам относятся: разнообразные транспортные системы, телеграф, телефон, информационно-вычислительные и топливно-энергетические сети. Территориально-распределенные системы составляют хозяйственную и управленческую инфраструктуру страны, и от их состояния и качества функционирования зависит не только существующий уровень экономического развития, но и возможности его дальнейшего роста.

С проблемой принятия решений в условиях неопределенности сталкиваются исследователи большинства сложных территориально-распределенных систем. Сетевые потоковые системы обладают неожиданными и порой неприятными свойствами уязвимости: за счет многочисленных связей и зависимостей в них нередко появляется "каскадный эффект", когда сбой в одном каком-либо месте провоцирует перегрузки и выход из строя многих других элементов сети. Все это обуславливает важность исследования территориально-распределенных систем в условиях неопределенности формально математическими методами. Задачи, которые при этом возникают, связаны с проектированием новых систем, развитием старых, проблематикой принятия решений по использованию имеющихся сетевых систем (управлению потоками в сети, распределению её ресурсов между пользователями), а так же с анализом возможностей улучшения работы сети за счет рационального перераспределения потоков с целью выбора оптимальной маршрутизации.

Рассматривая задачу о многопродуктовом потоке, которая имеет место только в случае существования в сети нескольких источников и нескольких стоков, а так же ограничений на то, что поток должен идти из некоторых выделенных источников в некоторые выделенные стоки [1], нужно выявить наличие как объективной, так и субъективной неопределенности [6-7]. Для рассматриваемых систем характерно наличие не только объективной, но и субъективной неопределенности, когда некоторые параметры системы известны отдельным пользователям, но не известны лицу, принимающему решения, или другим пользователям. За счет длительных сроков создания территориально-распределительной системы, условия её функционирования могут отличаться от расчетных при проектировании, поэтому естественна их корректировка в процессе построения сети и при распределении потоков в готовых сетях, т.е. многоэтапность процедуры принятия решений.

**Многопродуктовая потоковая сеть.** Принципиальная схема функционирования многопользовательской потоковой сетевой системы описывается известной математической моделью, которая называется многопродуктовой потоковой сетью (МП-сеть) и задается с помощью двух графов на одном и том же множестве вершин – узлов сети. Первый граф (физический) определяет физическую структуру сети, его ребра  $r_k$  соответствуют физическим отрезкам линий связи (дорогам, линиям электропередач, телефонному кабелю), проложенным от одного узла к другому (рис.1). Узлы сети соответствуют либо пунктам подключения (отключения) пользователей к сетевой системе, либо пунктам переключения с одной линии связи на другую: перекресткам дорог, узлам коммутации телефонных проводов и т.д. В этом случае вершины графа называются транзитными.

Нетранзитные узлы сети являются вершинами второго (логического) графа сети, определяющего структуру связей между пользователями – абонентами сети,

т.е. структуру требований на передачу потоков в сети. Ребра логического графа (графа тяготений) соединяют пары входов сети, между которыми нужна связь, так называемые абонентские или тяготеющие пары  $p_i$  (рис.2).

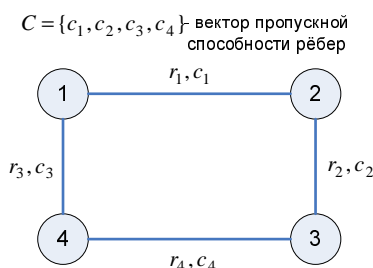


Рис.1. Физический граф

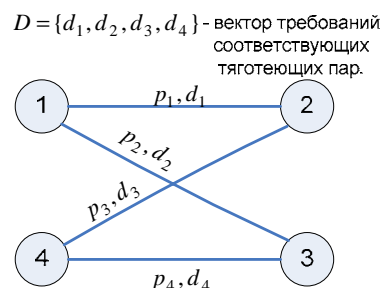


Рис.2. Логический граф

Объединение указанных двух графов в одну МП-сеть обусловлено тем, что связь между узлами, соединенными ребрами логического графа, может осуществляться только по ребрам физического графа. Ребра графов сети могут быть как ориентированными, так и неориентированными в зависимости от конкретной специфики задачи.

Название многопродуктовая («многопродуктовик») для МП-сети объясняется невзаимозаменяемостью потоков различных тяготеющих пар, например, их телефонных разговоров. Считается, что эти потоки соответствуют как бы разным видам продуктов: они не смешиваются, проходя по ребрам физического графа сети, и не могут поделиться в другой пропорции.

**Допустимость МП-сети [4].** Если известна количественная мера требований – заявки на потоки – тяготеющих пар, то ребрам логического графа сети приписываются соответствующие числа  $d_i$  условных единиц потока для данной абонентской пары  $p_i$ . В тех же условных единицах измеряется и пропускная способность ребер физического графа сети. Соответствующие числа  $c_k$  ограничивают суммарный поток всех абонентских пар по данному ребру  $r_k$  (см. рис.1,2). Задача распределения потоков в сети состоит в том, чтобы выбрать маршруты соединения абонентских пар в сети, т.е. проложить по ребрам физического графа пути для всех пар узлов, соединенных ребрами логического графа. При этом необходимо удовлетворить ограничениям (физическим) по пропускной способности и желательно удовлетворить ограничениям (логическим) по одновременному обеспечению требований всех пользователей. Если это возможно, то сеть называется допустимой [5].

**Допустимость МП-сети в условиях неопределенности.** Описанная выше модель многопродуктовой задачи о допустимости является довольно грубой моделью функционирования сложной сетевой системы, она отражает лишь характерные сетевые свойства: наличие входов/выходов транспортных магистралей и возможностей переключения с одной магистрали на другую, а так же существование различных пользователей, ассоциируемых каждый с парой входов в системы. Кроме того, модель не учитывает явно и ряда физических характеристик, например, ограничения по пропускной способности транзитных вершин (иногда их удается задать и в рамках данной модели путем введения дополнительных «фиктивных» вершин и ребер с ограниченной пропускной способностью, но в общем случае добавляются новые линейные ограничения неравенства, связывающие суммарные потоки на смежных ребрах) или же задержку по времени и вероятность потери и ошибок при прохождении

потока в вершинах и на ребрах (считается, что эти характеристики отражены в пропускной способности). Большой набор других важных характеристик должен учитываться с помощью нелинейных, зачастую комбинаторных, ограничений на распределение потоков, например, ограничение по числу транзитных вершин в маршруте соединения тяготеющей пары (что соответствует ограниченному времени ожидания, специальным условиям поддержания качества связи и т.п.) или по числу реберно-непересекающихся маршрутов для некоторых тяготеющих пар (что соответствует требованиям по надежности связи для этих пар).

Ребра физического графа МП-сети также могут различаться и по иным характеристикам, кроме пропускной способности, например, по степени защищенности. В таком случае удобно представить, что имеется как бы несколько физических графов различных категорий, и рассматривать несколько однотипных МП-сетей, различающихся лишь физическими графами. Аналогично и для пользователей МП-сети могут существовать разные категории обслуживания, тогда можно рассматривать МП-сети для нескольких логических графов, например, сначала для пользователей высшей категории, а потом на оставшейся пропускной способности ребер физического графа сети для пользователей остальных категорий. Таким образом, данная базовая модель допускает определенное расширение, хотя, конечно не описывает всего разнообразия задач, возникающих в сетевых системах. Тем не менее, она позволяет изучать сетевые задачи с неопределенными факторами, не затемняя специфики проблем, связанных с неопределенностью.

Согласно базовой модели многопродуктовой задачи о допустимости, задача анализа МП-сети зависит от двух векторов  $D$  и  $C$  переменных. Поэтому в ней возможна неопределенность двух типов. Первая связана с вектором требований и может трактоваться как субъективная: вектор требований пользователей, хотя и объективно существующий, не известен или не точно известен лицу, принимающему решения – выбирающему пути соединения абонентских пар. В случае полностью неизвестных требований возникает задача многокритериальной максимизации вектора  $z$  результирующих потоков  $z_i$  для всех абонентских пар  $p_i$  МП-сети, называемого мультипоток. Её решение – множество оптимальных по Парето и Эджворту мультипоток, т.е. векторов потоков, не увеличиваемых ни по одной компоненте без уменьшения какой-либо из других [8]. Другой крайний случай точно (или почти точно) известных требований приводит к проблеме выбора конкретной парето-оптимальной точки, являющейся решением задачи согласования интересов пользователей. Промежуточные варианты разнообразны: от известных границ для вектора  $D$  до известной (или не очень) функции распределения на заданном множестве его возможных значений.

Второй тип неопределенности связан с вектором  $C$  пропускной способности ребер физического графа МП-сети и трактуется как объективная неопределенность, не известная в момент исследования сети ни исследователю, ни пользователям. Причиной её возникновения является уменьшение пропускной способности или выход из строя отдельных ребер физического графа МП-сети в результате либо случайных повреждений сети, либо целенаправленных её разрушений. В первом случае известна, возможно неточно, функция распределения вектора  $C$  на множестве значений от 0 до вектора  $C^0$ , соответствующего заданной пропускной способности. Во втором случае ставится параметрическая задача поиска наихудшего разрушающего воздействия ограниченной мощности, равной текущему значению параметра. При этом можно рассмотреть и комбинированные постановки с различного рода субъективной неопределенностью в информированности о векторе требований.

Таким образом, постановка многопродуктовой задачи о допустимости в условиях неопределенности будет следующей[2].

Пусть имеются источники  $N_{d_i}$  и стоки  $N_{d'_i}$ , являющиеся  $p_i$ -ой тяготеющей парой, и  $\tilde{d}_i$ -й поток, который должен идти из источника  $N_{d_i}$  в сток  $N_{d'_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ )

Пусть  $x_{r_k}^{d_i}$  – это  $\tilde{d}_i$ -й поток по дуге  $r_k$  ( $k=1, 2, \dots, l$ ), причем каждое ребро  $r_k$  можно представить в виде  $r_k = (v_{n_k}, v_{m_k})$ , где  $n_k < m_k$  и  $v_{n_k}, v_{m_k}$  – две концевые вершины дуги  $r_k$  ( $n=1, 2, \dots, m, \dots, g$ ),  $\tilde{f}(d_i, d'_i)$  – величина  $\tilde{d}_i$ -го потока из  $N_{d_i}$  в  $N_{d'_i}$ .

Тогда многопродуктовая задача о допустимости в условиях неопределенности заключается в следующем. Заданы нечеткие пропускные способности  $\tilde{c}_k$  дуги  $r_k$ . Требуется выяснить – существуют ли допустимые потоки  $x_{r_k}^{d_i}$ , т.е. удовлетворяющие ограничениям:

$$\sum_k x_{r_k}^{d_i} = \sum_k x_{v_{n_k} v_{m_k}}^{d_i} = \begin{cases} -\tilde{f}(d_i, d'_i), & \text{если } v_{m_k} = d_i, \\ 0, & \text{если } v_{m_k} \neq d_i, d'_i, \\ \tilde{f}(d_i, d'_i), & \text{если } v_{m_k} = d'_i, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^q |x_{r_k}^{d_i}| \leq \tilde{c}_k \quad (\text{для всех } k).$$

**Заключение.** Представление многопродуктовой задачи о допустимости в нечетком виде приводит к постановке новых, нестандартных задач в территориально-распределенных системах: минимаксных, стохастических, многокритериальных, лексикографических. Причем результатом данной постановки, осуществляющейся с учетом нечетких условий, является нахождение наиболее оптимальных решений.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ни Т.С. Multi-Commodity Network Flows, J. ORSA, 11 (3), p.344-360 (May-June 1963).
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: МИР, 1974.
3. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки. – М.: Связь, 1978. – 456 с.
4. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984.
5. Малащенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. – Изд-во «Едиториал УРСС», 1999. – 160 с.
6. Малащенко Ю.Е., Новикова Н.М. Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления, 1998, №2. – С. 134-144.
7. Малащенко Ю.Е., Новикова Н.М. Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. Задача нормативного анализа уязвимости многопродуктовой потоковой сети // Известия РАН. Теория и системы управления, 1999, №4. – С. 88-100.
8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982