

4. ОСТ 58-22-00. Техническая база производства радиопродукции. Общие требования. Основные параметры. Классификация уровней качества. – М.: АО ВНИИТР, 2000. – 7 с.
5. ОСТ 58-18-96. Техническая база производства телерадиопродукции. Методы сертификации. Общие требования. Основные параметры и методы испытаний. – М.: АО ВНИИТР, 2000, Ч.1. – 54 с. / Ч.2. – 35 с.

В.В. Лисяк, М.В. Лисяк

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЕЙ*

Проблемы сетевого планирования, управления и проектирования инженерных сетей представляются как задачи синтеза сетей по определённым критериям. Под термином инженерные сети понимаются транспортные, электрические, экономические, социологические и др.

В качестве математического описания структуры таких сетей часто используется аппарат теории графов [1]. При синтезе сетей возникает задача выделения в графе некоторого суграфа, удовлетворяющего определенным условиям. Такими условиями, например, могут быть следующие:

- ◆ выделенный суграф должен быть связным;
- ◆ суграф не должен содержать циклов, т.е. быть деревом;
- ◆ суммарная весовая функция ребер суграфа должна быть минимальной.

Под весом ребра понимается некоторая функция P , характеризующая взаимоотношения между объектами (время, стоимость, расстояния и т.п.). Ниже предлагается алгоритм выделения в графе суграфа с указанными свойствами, основанный на преобразовании матрицы инцидентности графа I_G и не требующий большого объема вычислений.

Пусть исследуемый объект задан неориентированным графом $G=(X,U)$, без петель и кратных ребер, где X – множество вершин графа, $|X|=n$; U – множество ребер, $|U|=m$. Каждому ребру поставлен в соответствие вес $P_i > 0$, который может быть любой мерой взаимоотношения вершин инцидентных ребру.

Необходимо в графе G выделить такой связный суграф без циклов $G'=(X,U')$, где $U' \in U$, чтобы суммарная весовая функция ребер суграфа G' была оптимальной $S = \sum P_i$, $I = \{1, 2, \dots, m'\}$, $m' \in m$. Приведем некоторые определения.

Цикломатическим числом $\lambda(G)$ графа G называется число линейно независимых циклов графа, $\lambda(G) = m(G) - n(G) + \kappa(G)$, где $\kappa(G)$ – число компонент связности графа G .

Каркасом T графа G называется всякий связный суграф, удовлетворяющий условиям: $m(T) = m(G) - \lambda(G)$; $\lambda(T) = 0$; $n(T) = n(G)$.

Ранг $\rho(G)$ графа G – число ребер его каркаса $\rho(G) = m(G) - \lambda(G) = m(T)$.

Известно [1], что любые два каркаса одного и того же графа имеют одинаковое число ребер. Следовательно, выделение дерева с минимальной суммарной весовой функцией ребер равносильно выделению в графе каркаса с минимальной весовой функцией ребер. Алгоритм выделения в графе такого каркаса предлагается реализовать следующими двумя процедурами:

- 1) выделение в графе G некоторого наименьшего подмножества ребер $U' \in U$, покрывающего все вершины графа, которое назовем базовым подмножеством;
- 2) получение каркаса на базовом подмножестве U' .

Рассмотрим указанные процедуры.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 05-08-18115.

Процедура 1. Пусть $P=\{p_i\}$, $i \in I$ – множество весов ребер графа G . Выберем среди элементов множества P элементы с минимальным значением p_i и образуем подмножество из ребер, соответствующих выбранным элементам. В строку P занесем единицы в позиции x_i и x_j , если среди образованного подмножества ребер есть ребро $u_{i,j}$. Если при этом не образуется единичная строка, то переходим ко второму шагу. Если единичная строка образована, то выбранное подмножество ребер соответствует базовому подмножеству.

На втором шаге образуем подмножество ребер $p_i > p_j$. Пополняем строку единицами, соответствующими вновь выделенным ребрам. Причем, если на k -м шаге среди ребер выделенного подмножества нет ребер, покрывающих новые вершины, то это подмножество ребер исключаем из рассмотрения. Выделенное такой процедурой базовое подмножество ребер обладает тем свойством, что сумма весов его ребер будет наименьшей среди всех других базовых подмножеств, где W – множество ребер базового подмножества.

Обозначим мощность базового подмножества через $r=|W|$. Действительно, пусть A множество всех базовых подмножеств, а $a_k \in A$, $k \in K=\{1,2,\dots,q\}$, $q=|A|$. Тогда, если a_k получено таким образом, что объединяет ребра графа G с весами $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, и среди этой последовательности весов нет ни одного пропущенного веса p_i , то утверждение о минимальности суммы весов такого подмножества очевидно. Пусть в последовательности весов пропущен вес p_i вследствие того, что ни одно из соответствующих ему ребер не покрывает новой вершины графа. Тогда это подмножество ребер не включено в базовое подмножество. Предположим, что существует базовое подмножество, для которого выполняется условие минимальной суммы весов ребер и которое включает ребра с весом p_i . Однако тогда среди ребер этого подмножества должна отсутствовать часть ребер с весами $p_j - p_i$, иначе возникает противоречие с условием покрытия элементов строки единицами.

Процедура 2. Пусть согласно процедуре 1 выделено некоторое базовое подмножество $a_k = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$. Выделим на множестве ребер базового подмножества каркас T , который является деревом с минимальной суммарной весовой функцией ребер. Перед описанием процедуры 2 докажем верность следующего утверждения.

Лемма. Если мощность базового подмножества ребер равна рангу графа, то ребра этого подмножества образуют каркас графа.

Из определения базового подмножества следует, что ребра такого подмножества покрывают все вершины графа G . Допустим, что ребра базового подмножества не образуют каркаса. Тогда эти ребра должны образовывать, по крайней мере, один цикл, и, следовательно, число ребер базового подмножества должно быть больше чем $\rho(G)$, что противоречит условию леммы, либо содержать, по крайней мере, одну изолированную вершину, что противоречит определению базового подмножества.

Следовательно, если выполняется условие леммы для выделенного базового подмножества, то необходимость выполнения процедуры 2 отпадает и на этом поставленная задача решена. Процедура 2 базируется на известной теореме Прима и двух ее следствиях:

Теорема. Система S некоторых столбцов матрицы инцидентности I_G линейно независима тогда и только тогда, когда суграф T_s , порожденный множеством тех ребер, которые соответствуют столбцам S , не содержит циклов.

Следствие 1. Ранг матрицы инцидентности равен рангу $\rho(G)$ графа G .

Следствие 2. Система S из $\rho(G)$ столбцов матрицы I_G линейно независима тогда и только тогда, когда соответствующий суграф T_s является каркасом графа.

Согласно теореме и следствию 2, для выделения из графа каркаса необходимо сохранить в матрице I_G систему из $\rho(G)$ линейно независимых строк и отбросить остальные строки. Тогда в матрице будет содержаться единичная квадратная подматрица порядка $\rho(G)$, а ребра, соответствующие единичным элементам, порождают в силу следствия 2 каркас графа.

Таким образом, процедура 2 заключается в следующем. Построим матрицу I_G , в которой строки соответствуют вершинам графа, а столбцы соответствуют ребрам базового подмножества:

К матрице I_G будем применять следующие три типа операций: 1 – перестановку столбцов; 2 – перестановку строк; 3 – замену строки суммой ее с другой строкой матрицы.

Заметим, что применение операций 2 и 3 не нарушает взаимно однозначного соответствия между столбцами матрицы и ребрами графа, а операция 1 соответствует перенумерации ребер. Операция 3 определяется как сложение по модулю два. Преобразование матрицы I_G с помощью указанных операций производится следующим образом.

Если элемент $a_{11} = 0$, то применяем операции типа 1 или 2, чтобы $a_{11} = 1$. Если при этом не все элементы столбца равны нулю, то применяем операцию 3 с целью получения в столбце нулевых элементов, кроме элемента a_{11} . Аналогично применяем операции 1,2,3 относительно элементов a_{11} a_{22} a_{33} и т.д., до тех пор, пока не образуется матрица вида:

$$\left| \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,\rho+1} & \dots & a_{1,k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,\rho+2} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{\rho,\rho+1} & \dots & a_{\rho,k} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right|$$

Выпишем номера ребер, которые соответствуют первым $\rho(G)$ столбцам матрицы (т.е. единичной подматрице). Согласно теореме и следствиям эти ребра образуют каркас графа G на множестве ребер базового подмножества ребер.

Последовательность построения на графе дерева с минимальной суммарной весовой функцией ребер можно сформулировать следующим образом:

1. По заданному множеству ребер и соответствующим им весам выделяем в графе G базовое подмножество ребер. Переходим к п.2.
2. Если мощность базового подмножества равна рангу графа, то переходим к п.6, иначе к п.3.
3. Для базового подмножества ребер записываем матрицу инцидентности I_G и переходим к п.4.
4. К матрице I_G применяем операции перестановки столбцов, замены одной строки суммой ее с другой строкой. Получаем матрицу I'_G и переходим к п.5.
5. Выписываем ребра матрицы I'_G , соответствующие первым $\rho(G)$ столбцам. Переходим к п.6.
6. Получено дерево с минимальной суммарной весовой функцией ребер.

Рассмотрим описанный метод на примере графа, изображенного на рис.1, список инцидентности ребер которого имеет вид:

$$u_1 = \{x_1, x_2\}; u_2 = \{x_1, x_2\}; u_3 = \{x_1, x_2\}; u_4 = \{x_1, x_2\}; u_5 = \{x_1, x_2\}; u_6 = \{x_1, x_2\}; \\ u_7 = \{x_1, x_2\}; u_8 = \{x_1, x_2\}; u_9 = \{x_1, x_2\}; u_{10} = \{x_1, x_2\}; u_{11} = \{x_1, x_2\}; u_{12} = \{x_1, x_2\};$$

$u_{13} = \{x_1, x_2\}; u_{14} = \{x_1, x_2\}; u_{15} = \{x_1, x_2\}; u_{16} = \{x_1, x_2\}; u_{17} = \{x_1, x_2\}$.
 Веса ребер графа зададим строкой:

$$P = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} \\ P = & 1 & 5 & 2 & 3 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 & 2 & 10 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Выделяем базовое подмножество ребер. Выпишем ребра со значением весов равных 1. Получаем подмножество $\{u_1, u_9, u_{12}, u_{16}\}$. В некоторой строке R пометим единицами те вершины графа (рис.1), которые принадлежат выделенным ребрам:

Так как строка R заполнена единицами не полностью, то выделяем подмножество ребер с весом 2. В такое подмножество войдут следующие ребра $\{u_3, u_8, u_{13}, u_{14}, u_{17}\}$. .Корректируем строку R , которая примет вид:

$$R = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ R = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Поскольку строка R еще не содержит все единицы, то повторяем процедуру для ребер с весами 3. Таким подмножеством является $\{u_4, u_5\}$, а скорректированная строка R примет вид:

$$R = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ R = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Так как строка R стала единичной, то базовое подмножество ребер примет вид: $\{u_1, u_9, u_{12}, u_{16}, u_3, u_8, u_{13}, u_{14}, u_{17}, u_4, u_5\}$. Мощность базового подмножества равна 11, а $\rho(G)=9$, следовательно, записываем матрицу инцидентности I_G графа:

$$R = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ R = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

и применяем к ней операции типов 1,2,3. Последовательность номеров применяемых типов операций будем указывать сверху – вниз над стрелкой перехода от матрицы к матрице:

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td><td>u_4</td><td>u_5</td><td>u_6</td><td>u_7</td><td>u_8</td><td>u_9</td><td>u_{10}</td><td>u_{11}</td><td>u_{12}</td><td>u_{13}</td><td>u_{14}</td><td>u_{15}</td><td>u_{16}</td><td>u_{17}</td></tr> <tr><td>x_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_9</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_{10}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	x_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_8	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	x_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ \rightarrow	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td><td>u_4</td><td>u_5</td><td>u_6</td><td>u_7</td><td>u_8</td><td>u_9</td><td>u_{10}</td><td>u_{11}</td><td>u_{12}</td><td>u_{13}</td><td>u_{14}</td><td>u_{15}</td><td>u_{16}</td><td>u_{17}</td></tr> <tr><td>x_1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>x_7</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_9</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_{10}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_4	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	x_7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_8	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_8	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_4	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_8	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td><td>u_4</td><td>u_5</td><td>u_6</td><td>u_7</td><td>u_8</td><td>u_9</td><td>u_{10}</td><td>u_{11}</td><td>u_{12}</td><td>u_{13}</td><td>u_{14}</td><td>u_{15}</td><td>u_{16}</td><td>u_{17}</td></tr> <tr><td>x_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_5</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_7</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_8</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_9</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_{10}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_4	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_6	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_8	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	x_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$ \rightarrow	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td><td>u_4</td><td>u_5</td><td>u_6</td><td>u_7</td><td>u_8</td><td>u_9</td><td>u_{10}</td><td>u_{11}</td><td>u_{12}</td><td>u_{13}</td><td>u_{14}</td><td>u_{15}</td><td>u_{16}</td><td>u_{17}</td></tr> <tr><td>x_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_9</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>x_{10}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	x_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_8	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_4	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_6	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_8	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_8	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
x_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																

	u_1	u_3	u_4	u_9	u_{12}	u_8	u_{16}	u_{17}	u_{13}	u_{14}	u_5	
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	3
x_6	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	3
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
x_8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
x_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	

	u_1	u_3	u_4	u_9	u_{12}	u_8	u_{16}	u_{17}	u_{13}	u_{14}	u_5
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В конечной матрице выпишем ребра, соответствующие первым $\rho(G)$ столбцам $\{u_1, u_3, u_4, u_9, u_{12}, u_8, u_{16}, u_{17}, u_{13}\}$. Для исходного графа (рис.1), дерево, построенное на выделенных ребрах, представлено на рис.2. Суммарная весовая функция ребер этого дерева равна 15.

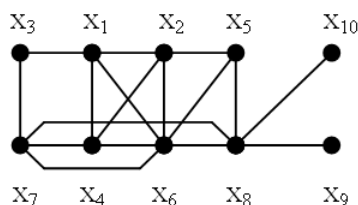


Рис.1. Исходный граф

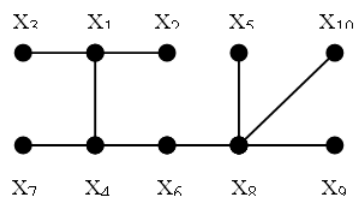


Рис.2. Дерево, построенное на выделенных ребрах

В заключение отметим, что описанный метод распространяется на мультиграфы и может найти широкое применение в проектировании инженерных сетей. Алгоритм не требует проверки появления циклов на каждом шаге, что характерно для большинства существующих методов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.

Н.Ш. Хусаинов

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА АВТОНОМНОГО КОНТРОЛЯ ЦЕЛОСТНОСТИ ДЛЯ БОРТОВОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ РАДИОНАВИГАЦИИ

Обзор известных подходов к контролю целостности системы радионавигации. Под *достоверность* навигационной информации понимается способность навигационной системы (устройства) поддерживать с заданной вероятностью свои характеристики в требуемых пределах [1]. Главной составной частью достоверности навигационных измерений является целостность навигационной системы, под которой обычно понимается способность обнаружить недопустимое ухудшение в работе системы с заданной вероятностью и временем запаздывания (от момента начала неправильного функционирования или доступа к системе до момента его обнаружения). Требования по значениям вероятности обнаружения и времени запаздывания определяются областью применения системы навигации, в